МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА ІМЕНІ О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

З ДИСЦИПЛІНИ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр у галузі знань 0305 «Економіка та підприємництво» за напрямами підготовки 6.030504 «Економіка підприємства» та 6.030509 «Облік і аудит»)

Харків – ХНУМГ – 2013

Методичні вказівки до проведення практичних занять з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» (для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, у галузі знань *0305 «Економіка та підприємництво»* за напрямами підготовки *6.030504 «Економіка підприємства»* та *6.030509 «Облік і аудит»)* / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: Г. В. Білогурова, В. П. Протопопова, Н. В. Макогон. – Х.: ХНУМГ, 2013. – 72 с.

Укладачі: Г. В. Білогурова,
В. П. Протопопова,
Н. В. Макогон.

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу та узгоджена з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендовано для підготовки бакалаврів у галузі знань *0305 «Економіка та підприємництво»*.

Рецензент: зав. кафедри прикладної математики і інформаційних технологій Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова, доктор техн. наук, проф. М. І. Самойленко.

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики і інформаційних технологій, протокол №4 від 19.11.2009 р.

Тема 1. Елементи комбінаторики

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: *Комбінаторика, Перестановка, Розміщення, Сполучення, Правило додавання, Правило множення.*

<u>*Комбінаторика*</u> – це розділ математики, що займається підрахунком кількості комбінацій, складених з елементів множини підлеглих тим або іншим умовам.

<u>*До основних понять комбінаторики*</u> можна віднести: *перестановки, розміщення, сполучення, правила додавання та множення.*

Розглянемо ці поняття на прикладі множини $\{\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu\}$

1) приклади ***перестановок:***

$$\{\beta, \alpha, \gamma, \lambda, \mu\}$$
$$\{\gamma, \beta, \lambda, \mu, \alpha\}$$
$$\bullet\bullet\bullet$$
$$\{\gamma, \beta, \alpha, \mu, \lambda\}$$

Кількість перестановок $P_n = n!$ $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

2) приклади ***розміщень*** з 5 по 3

$$\left.\begin{matrix}\{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \{\beta, \alpha, \gamma\} \\ \bullet\bullet\bullet \\ \{\gamma, \mu, \lambda\}\end{matrix}\right\}$$
$$\{\beta, \mu, \gamma\}$$

враховується й послідовність й склад елементів

Кількість розміщень з n елементів по r елементах

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

3) приклади ***сполучень*** з 5 по 3:

$$\left.\begin{matrix}\{\alpha, \beta, \gamma\} \\ \{\gamma, \mu, \lambda\} \\ \bullet\bullet\bullet \\ \{\beta, \mu, \gamma\}\end{matrix}\right\}$$

послідовність елементів не враховується, важливий лише склад

Кількість сполучень з *n* елементів по *r*

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10.$$

Корисні формули: $C_n^0 = 1;\quad C_n^n = 1;\quad C_n^1 = n;\quad C_n^m = C_n^{n-m}.$

4) правило <u>*додавання:*</u> Якщо ***n*** дій, які взаємно виключають одна одну (<u>або</u> перша <u>або</u> друга <u>або</u> … <u>або</u> *n-на*), можуть бути виконані перша $\boldsymbol{m_1}$, друга $\boldsymbol{m_2}$ способами і так далі, *n*-на $\boldsymbol{m_n}$ способами, то виконати якусь одну з цих дій можна $\sum_{i=1}^{n} m_i$ способами (<u>сума кількостей</u>).

Завдання 1.1: Скількома способами на полиці можна розставити 6 книг?

<u>*Рішення*</u>: Початкова множина містить 6 елементів (книг). Ми оперуємо всіма елементами множини. Розставляючи книги на полиці, ми враховуємо послідовність книг (порядок важливий), тому треба застосувати формулу $P_6 = 6! = 720$.

<u>*Відповідь*</u>: Шість книг на полиці можна розмістити 720 способами.

Завдання 1.2: У ящику лежить 7 книг. Студент довільним чином бере 3 з них і розставляє їх на полиці. Скількома способами він може це зробити?

<u>*Рішення:*</u> Оскільки студент розставляє на полиці тільки 3, а не всі 7 книг і порядок розташування книг на полиці має значення, застосовуємо формулу для підрахунку розміщень $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 210$.

<u>*Відповідь*</u>: Вибрати і розташувати книги на полиці студент може 210 способами.

Завдання 1.3: У ящику лежить 7 книг. Студент довільним чином бере 3 з них. Скількома способами він може це зробити?

<u>*Рішення:*</u> В цьому випадку порядок книг не важливий, важливе лише найменування книг, то тут застосовується формула для підрахунку сполучень $C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{6\cdot 4!} = 35$.

<u>*Відповідь*</u>: Вибрати три книги з семи студент може 35 способами.

5) приклад застосування правила ***додавання.***

Завдання 1.4: В групі 10 дівчат і 15 хлопців. Викладач викликає одного студента до дошки. Скількома способами він може це зробити?

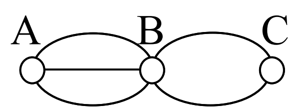
Викладач викликає тільки одного студента або дівчину або хлопця (дві дії, що взаємно виключають одна одну). Викликати дівчину викладач може 10 способами, викликати хлопця 15 способами. Таким чином, викликати студента викладач може 10+15=25 способами.
<u>*Відповідь*</u>: Викладач може викликати студента 15 способами.

б) приклад застосування правила ***множення.***

Завдання 1.5: З міста *A* в місто *B* ведуть три дороги, з міста *B* в місто *C* ведуть дві дорогі. Скількома способами автотурист може потрапити з міста *A* в місто *C*?

<u>*Рішення:*</u>

У цьому завданні автотуристові необхідно виконати дві дії: перше – добратися з міста *A* в місто *B*, і друге – з міста *B* в місто *C*. Першу дію він може виконати *3* способами, а другу *2* способами. Тобто добратися з міста *A* в місто *C* він може $s = 3 \cdot 2 = 6$ способами.



<u>*Відповідь*</u>: Автотурист може потрапити з міста *A* в місто *C* 6 способами.

Завдання 1.6: Скількома способами з цифр 1, 2, 3 можна скласти тризначне число?

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Завдання 1.7: В коробці знаходяться 7 різнокольорових куль. Скількома способами можна вибрати з коробки три кулі?

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!} = 5 \cdot 7 = 35.$$

Завдання 1.8: Скількома способами можна скласти чотиризначне число з наступного набору цифр:
а) дані цифри $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ кожна з яких є тільки в одному екземплярі (цифри повторюватися не можуть).

<u>*Рішення:*</u> 1 спосіб: з використанням розміщень

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120$$

2 спосіб: за допомогою правила множення

$$\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ \square & \square & \square & \square \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array} \qquad k=4 \qquad S=\prod_{i=1}^{4} n_i = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$$

n_2 на одиницю менше n_1, оскільки одна з п'яти цифр вже вибрана і початкова множина скоротилася до 4 цифр, відповідно n_3 менше n_2 на одиницю і т.д.

Відповідь: З цифр $\{1,2,3,4,5\}$ чотиризначне число можна скласти 120 способами.

б) дані цифри $\{0,1,2,3,4\}$. Скількома способами можна скласти чотиризначне число.

Рішення:

$$\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \qquad k=4 \qquad S=\prod_{i=1}^{4} n_i = 4\cdot 4\cdot 3\cdot 2=96$$

на відміну від завдання а) $n_1 =4$ оскільки чотиризначне число не може починатися з 0, тобто ми можемо вибирати з 4 цифр $\{1,2,3,4\}$ n_2 дорівнює 4 тому, що цифра *0* може стояти на другому місці, але одна з цифр $\{1,2,3,4\}$ вже використана, n_3 і n_4 залишаються без зміни.

Важливо! Якщо складається не число, а цифрова комбінація або шифр, то 0 може стояти на першому місці і кількість способів буде дорівнювати 120.

в) дані цифри $\{1,2,3,4,5\}$. Скількома способами можна скласти чотиризначне число, якщо цифри можуть повторюватися.

Рішення:

$$\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ \square & \square & \square & \square \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{array} \qquad k=4 \qquad S=\prod_{i=1}^{4} n_i = 5^4 = 625$$

У завданні а) цифри повторюватися не могли й була неможлива, наприклад, комбінація *1123*. А зараз такі комбінації можливі, тобто в кожен розряд можна вибрати будь-яку з *5* цифр.

Завдання 1.9: На кожній з шести однакових карток надрукована одна з наступних літер { А Т М Р С О}.

а) з колоди карток на стіл викладають 4 картки і читають слово яке вийшло. Скількома способами це можна зробити?

<u>*Рішення:*</u> Оскільки одне слово відрізняється від іншого не тільки складом, але і порядком літер, застосовуємо розміщення.

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$$

б) з колоди карток витягують 4 картки, порядок витягання не враховується. Скількома способами це можна зробити?

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

Завдання 1.10: В ящику десять однакових деталей, помічених номерами 1, 2, ..., 10. Навмання витягують шість деталей.

а) скількома способами можна витянути шість деталей?

$$C_{10}^6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$$

б) визначити кількість шестірок, серед яких є деталь №1?

<u>*Рішення:*</u> якщо в завданні а) ми могли довільно вибрати всі 6 елементів, то в завданні б) ми можемо вибрати тільки 5 елементів і вибирати ми їх можемо не з 10 деталей, а тільки з 9, виключаючи деталь №1

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126 \cdot$$

Завдання 1.11: З п'яти літер розрізної азбуки складено слово {КНИГА}. Скількома способами можна розкласти ці літери на столі?

$$P_5 = 5! = 120$$

Завдання 1.12: З шести літер розрізної азбуки складено слово *{АНАНАС}*.

а) скількома способами можна розкласти ці букви на столі?

$$P_6 = 6!$$

б) скільки існує комбінацій, при яких можна прочитати слово *АНАНАС*?

Рішення: пронумеруємо картки з літерами:

$$\text{А}^1\text{Н}^2\text{А}^3\text{Н}^4\text{А}^5\text{С}^6$$

– літери *А* можна міняти місцями

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ & & \vdots & & & \end{matrix}\right\} 3! = 6 \ \textit{способами}$$

– дві букви *Н* можна міняти місцями

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{matrix}\right\} 2! \ \textit{способами}$$

– можна міняти місцями і літери *А* і букви *Н*, таким чином $S = 3! \cdot 2! = 12$ перестановок відповідає слову АНАНАС.

Відповідь: Слово *АНАНАС* можна отримати 12 способами.

Завдання 1.13: У вагоні трамвая 15 двомісних крісел. Скількома способами на них можуть розміститися 30 пасажирів?

$$P_{30} = 30!$$

***Завдання 1.14*:** На станції є 8 запасних колій. Скількома способами на них можна розставити три різних потяги?

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1} = 336$$

***Завдання 1.15*:** Скількома різними способами можна розкласти в дві кишені 10 монет різної вартості по рівній кількості монет?

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{120} = 252$$

Завдання 1.16: Скільки може бути складено різних комбінацій з 10 цифр від 0 до 9, якщо цифри повторюватися не можуть?

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720\,.$$

Завдання 1.17: До каси підходять 5 старост одночасно. Скількома способами вони можуть стати в чергу?

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120\,.$$

Завдання 1.18: Є 5 ЕОМ виробництва США, 4 – Японія і 3 – Малайзія. Скількома способами можна вибрати один комп'ютер?

$n_1=5;\ n_2=4;\ n_3=3$, тоді $N = 5 + 4 + 3 = 12$.

Завдання 1.19: На конкурс висунуто 16 проектів. Призових місць тільки 3. Скільки може бути варіантів нагородження?

$n_1=16;\ n_2=15;\ n_3=14$, тоді $N = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$.

Тема 2. Безпосередній підрахунок ймовірності

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: *експеримент, подія, випадкова подія, ймовірність події, достовірна подія, неможлива подія, попарно сумісні події, попарно несумісні події, повна група подій, рівноможливі події. Класичне визначення ймовірності.*

Приклади, що демонструють деякі визначення:

1. Стрілець стріляє по мішені. Постріл – це **експеримент.**

   Попадання – це **подія.**

2. З урни, в якій є кольорові кулі, навмання виймають одну кулю. Витягання кулі – **експеримент.**

   Поява білої (чорної, червоної і ін.) кулі – **подія.**

3. Експеримент з одноразовим киданням гральної кістки.

   Достовірна подія – випадання числа в межах від 1 до 6.
   Ймовірна подія – випадання числа 3.
   Ймовірні події – випадання парного числа, тобто 2, 4, 6.
   Неможлива подія – випадання десяти очок.

4. Експеримент з одноразовим киданням гральної кістки.

   Дві несумісні події: випадання "**2**" і випадання **непарного числа очок.**
   Дві сумісні події: випадання "**2**" і випадання **парного числа очок.**

5. Експеримент з одноразовим киданням гральної кістки.

   Повну групу подій складають події $\{A, B, C, D, E, F\}$, де А – поява *1*, $B-2$, $C-3$, $D-4$, $E-5$, $F-$ *6* очок при киданні гральної кістки.

   Повну групу подій складають дві події $\{G, H\}$ де G – поява парного числа очок і $H-$ непарного числа очок при киданні гральної кістки.

6. Експеримент з одноразовим киданням гральної кістки.

Шість подій: поява *1, 2, 3, 4, 5, 6* очок при киданні гральної кістки є рівноможливими подіями, оскільки частота їх появи однакова і отже однакова ймовірність.

Дві події: випадання одиниці і парного числа очок при киданні гральної кістки є не рівноможливими, ймовірність появи парного числа очок в три рази вище за ймовірність появи одиниці.

Експеримент	**№**	**Події**	**Сумісні (*так, ні*)**	**Складають повну групу подій (*так, ні*)**	**Рівно-можливі (*так, ні*)**
Підкидають одну монету	1	*A – поява герба;* *B – поява цифри.*	*ні*	*так*	*так*
Підкидають дві монети	2	*A – поява герба на першій монеті;* *B – поява цифри на другій монеті.*	*так*	*ні*	*так*
	3	*A – поява двох гербів;* *B – поява двох цифр.*	*ні*	*ні*	*так*
Підкидають одну гральну кістку	4	*A – поява числа очок менше трьох;* *B – поява числа очок більше трьох.*	*ні*	*ні*	*ні*
Роблять два постріли по мішені	5	*A* – жодного попадання; *B* – одне попадання; *C* – два попадання.	*ні*	*так*	*ні*
	6	*D – хоч би одне попадання;* *E – тільки один промах.*	*так*	*ні*	*ні*
	7	*F – хоч би одне попадання;* *G – два промахи.*	*ні*	*так*	*ні*
З гральної колоди навмання витягують одну карту	8	*A – поява карти пікової масті;* *B – поява карти бубнової масті;* *C – поява карти трефової масті.*	*ні*	*ні*	*так*
З гральної колоди навмання витягують дві карти	9	*A – поява двох карт чорної масті;* *B – поява туза;* *C – поява дами.*	*так*	*ні*	*ні*

Ймовірність події А – це відношення ***m*** (кількості випадків, які *сприяють А* до **n** (*загальної кількості випадків* в даному експерименті).

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Завдання 2.1: Гральна кістка підкинута 1 раз. Знайти ймовірність того, що на верхній грані опиниться число 2.

Рішення: У даному експерименті 6 результатів $\{1,2,3,4,5,6\}$ ($n = 6$), кількість сприятливих результатів – це кількість двійок на гранях кубика ($m = 1$). Тобто ймовірність випадання двійки $P = \frac{1}{6}$.

Завдання 2.2: Гральна кістка підкинута *1* раз. Знайти ймовірність того, що на верхній грані опиниться парне число.

Рішення: У даному експерименті 6 результатів $\{1,2,3,4,5,6\}$ ($n = 6$), кількість сприятливих результатів – це кількість парних чисел, тобто *2, 4, 6 (*$m = 3$*)*. Тобто ймовірність випадання парного числа $P = \frac{3}{6} = 0.5$.

Завдання 2.3: В коробці лежать *3* червоних, *5* білих і *2* чорних кулі. З коробки навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля буде білою (чорною)?

Рішення: Загальна кількість куль в ящику $n = 3 + 5 + 2 = 10$ кількість сприятливих результатів експерименту $m = 5$ ($m = 2$). Отже ймовірність витягти білу кулю $P = \frac{5}{10}$, чорну – $P = \frac{2}{10}$.

Завдання 2.4: Кидають дві монети. Яка ймовірність того, що хоч би на одній випаде "цифра"?

Рішення: Позначимо: *А* – подія, яка полягає в появі хоч би однієї "цифри" при киданні двох монет, тобто в появі однієї або двох "цифр". Тоді *Р(А)* – ймовірність, яку потрібно знайти.

Можливими результатами досвіду є чотири випадки:

- перший: на першій монеті – "герб", на другий також "герб";
- другий: на першій монеті – "герб", на другій –"герб";
- третій: на першій монеті – "герб", на другій – "герб";
- четвертий: на першій монеті – "герб", на другій також "цифра".

Отже, загальне число можливих результатів експерименту *n = 4* .

З чотирьох випадків другий, третій і четвертий є сприятливими даній події. Отже, число сприятливих результатів *m=3*. Отримаємо:

P(A)= m/n = 3/4 .

Завдання 2.5: В лототроні знаходяться 37 кульок з числами *1,2,...,37* . Яка ймовірність появи кульки з числом, кратним 10, в результаті одного запуску лототрона?

P=3/37. (сприятливі результати *10, 20, 30)*

Завдання 2.6: Кидають дві монети. Яка ймовірність того, що на одній випаде "цифра", а на іншій – "герб"?

P=2/4=1/2

Завдання 2.7: Кидають послідовно дві монети. Яка ймовірність того, що на першій монеті випаде "цифра", а на другій – "герб"?

P=1/4

Завдання 2.8: З преферансової колоди, що містить 32 карти, навмання витягується одна. Яка ймовірність того, що це "дама" або "король" або "валет"?

P=12/32=3/8

Завдання 2.9: В академічній групі 25 студентів. У трьох студентів прізвище починається з літери "А", у двох – з "О", у одного – з "І", у останніх – з приголосної. Викладач навмання викликає одного студента. Яка ймовірність того, що його прізвище починається з приголосної літери?

P=19/25

Завдання 2.10: Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, пам'ятаючи лише, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри.

P=1/10*1/9=1/90

Завдання 2.11: З 10 карток з цифрами *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9* вибирають навмання три. Яка ймовірність того, що

а) в порядку вибору цифр вийде число *347: P=1/10*1/9*1/8=1/720*

б) можна буде скласти число *347*? $P = \frac{1}{C_{10}^3} = \frac{3!7!}{10!} = \frac{6}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{120}$

***Завдання 2.12*:** В мішечку 5 однакових кубиків. На всіх гранях кожного кубика написана одна з наступних букв: *О, П, Р, С, Т*. Найти ймовірність того, що на вийнятих поодинці і розташованих в одну лінію кубиках можна буде прочитати слово "спорт"?

P=1/5!=1/120

Завдання 2.13: В мішечку *5* однакових кубиків. На всіх гранях кожного кубика написана одна з наступних букв: *М, О, О, О, Л, К*. Найти ймовірність того, що на вийнятих поодинці і розташованих в один рядок кубиках можна буде прочитати слово "молоко"?

P=3!/6!=6/720=1/120 або P=1/6*3/5*1/4*2/3*1/2*1

Завдання 2.14: В мішечку 5 однакових кубиків. На всіх гранях кожного кубика написана одна з наступних букв: *А, А, А, Н, Н, С*. Найти ймовірність того, що на вийнятих поодинці і розташованих в один рядок кубиках можна буде прочитати слово *"ананас"*?

$$P=3!2!/6!=1/60$$

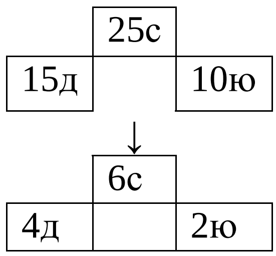
Завдання 2.15: На п'яти картках написані букви *К, М, Н, І, Т*. Виймають навмання *3* картки. Яка ймовірність того, що

а) в порядку вибору карток вийде слово *"кіт"* $P=\dfrac{1}{5\cdot4\cdot3}=\dfrac{1}{60}$

б) з вийнятих карток можна скласти слово *"кіт"*?

$$P=\frac{1}{C_5^3}=\frac{3!2!}{5!}=\frac{2\cdot3!}{5\cdot4\cdot3!}=\frac{1}{10}$$

Завдання 2.16: В академічній групі 25 студентів, з них 15 дівчат. Яка ймовірність того, що серед перших шести, що увійшли до аудиторії, буде 4 дівчини?



$$P=\frac{C_{15}^4\cdot C_{10}^2}{C_{25}^6}=0{,}0762$$

Завдання 2.17: Купується одна картка гри "Спортлото", в якій слід викреслити *6* чисел з *36*. Яка ймовірність, що гравець викреслить *6* з *6* виграшних чисел?

$$P=\frac{C_6^6}{C_{36}^6}=\frac{6!\cdot30!}{36!}=\frac{720}{36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32\cdot31}=5{,}1\cdot10^{-7}$$

Завдання 2.18: Купується одна картка гри "Спортлото", в якій слід викреслити *6* чисел з *36*. Яка ймовірність, що гравець викреслить *3* з *6* виграшних чисел?

$$P=\frac{C_6^3\cdot C_{30}^3}{C_{36}^6}=0{,}0416882$$

Завдання 2.19: Десять осіб сідають за круглим столом. Яка ймовірність того, що дві певні особи опиняться поруч?

Рішення: Загальне число варіантів розміщення *10* осіб на *10* місцях – кількість перестановок з *10* елементів, тобто $n = 10! = 4082400$.

Нехай дві певні особи займають *1-ше* і *2-ге* місця, тоді останні можуть розміститися *8!* способами. Крім того, дві певні особи можуть сидіти на місцях *2* і *3*, *3* і *4* і так далі, тобто число варіантів зростає в *10* разів. До того ж ці особи можуть помінятися місцями. Отже, число сприятливих результатів

$$m = 8!*10*2 = 907200.$$

Тоді $P = m / n = 0{,}222$

Завдання 2.20: Задумане двозначне число. Знайти ймовірність того, що задуманим виявиться число

а) випадково назване $P = \dfrac{1}{10 \cdot 9} = \dfrac{1}{90}$,

б) випадково назване з різними цифрами? $P = \dfrac{1}{9 \cdot 9} = \dfrac{1}{81}$

Завдання 2.21: Є 5 ЕОМ виробництва США, 4 – Японія і 3 – Малайзія. Знайти ймовірність покупки:

а) одного комп'ютера виробництва США, якщо купити будь-який комп'ютер можна з однаковою ймовірністю.

$$P = \frac{5}{5+4+3} = \frac{5}{12};$$

б) двох комп'ютерів США.

$$P = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33} \quad \text{або} \quad P = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}.$$

Тема 3. Основні теореми теорії ймовірностей

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: *сума двох несумісних подій, сума двох сумісних подій, добуток двох незалежних подій, добуток двох залежних подій, протилежні події.*

❖ ***Теорема 1. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:***

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

❖ ***Теорема 2. Ймовірність появи хоч би однієї з двох спільних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи:***

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

❖ ***Теорема 3. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1:***

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Завдання 3.1: Дві гармати стріляють по одній мішені. Перша гармата в середньому вражає мішень 8 з 10 разів, а друга – 7 з 10. Знайти ймовірність поразки мішені, якщо обидві гармати вистрілять.

Перший метод рішення. Введемо наступні позначення: A – попадання в мішень першим знаряддям, B – попадання в мішень другим знаряддям. C – поразка мішені. Виходячи з умови завдання: $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.7$. Події A і B є сумісними, оскільки настання події A не суперечить настанню події B. Мішень може бути уражена або першою або другою гарматами. Отже ймовірність поразки мішені складе $P(C) = 0.8 + 0.7 - 0.8 * 0.7 = 0.94$. Ймовірність поразки мішені при стрілянині з декількох знарядь завжди вище за ймовірність влучення в мішень будь-якого із знарядь.

❖ ***Теорема 4. Ймовірність спільної появи двох незалежних подій А та В дорівнює добутку ймовірністей цих подій:***

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

❖ ***Теорема 5. Ймовірність спільної появи двох залежних подій А та В дорівнює добутку ймовірністі однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену в припущенні, що перша подія вже настала:***

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Завдання 3.1: Дві гармати стріляють по одній мішені. Перша гармата вражає мішень з ймовірністю 0.8, а друге – 0.7. Знайти ймовірність поразки мішені, якщо обидві гармати в неї вистрілять.

Другий метод рішення. Введемо наступні позначення: $\overline{A}$ – промах першої гармати, $\overline{B}$ – промах другої гармати. С – поразка мішені. Згідно теореми 3, ймовірність промаху для першої гармати складає $P(\overline{A}) = 0.2$, а для другої – $P(\overline{B}) = 0.3$.

Мішень уражена, якщо в неї влучила перша гармата і не влучила друга гармата $C_1 = A \cap \overline{B}$. Мішень уражена, якщо в неї влучила друга гармата і не влучила перша гармата $C_2 = \overline{A} \cap B$. І нарешті, мішень уражена, якщо в неї влучили обидві гармати і перша і друга $C_3 = A \cap B$.

Подія *С* настає, якщо відбувається одна з подій C_1 або C_2 або C_3, причому події C_1, C_2, C_3 несумісні події, тоді $C = A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B \cup A \cap B$. Отже, ймовірність поразки мішені складе $P(C) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.7 = 0.94$.

❖ ***Теорема 6: Сума ймовірностей повної групи подій дорівнює 1:***

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Завдання 3.1: Дві гармати стріляють по одній мішені. Перша гармата вражає мішень з ймовірністю 0.8, а друге – 0.7. Знайти ймовірність поразки мішені, якщо обидві гармати вистрілять.

Третій метод рішення. Введемо наступні позначення: $\overline{A}$ – промах першої гармати, $\overline{B}$ – промах другої гармати. С – поразка мішені. $\overline{C}$ – не поразка мішені. Згідно теоремі 3, $P(\overline{A}) = 0.2$, $P(\overline{B}) = 0.3$.

Події С і $\overline{C}$ є протилежними і згідно теореми 3 сума їх ймовірностей дорівнює 1, тобто $P(C)=1-P(\overline{C})$. Мішень не уражена, якщо в неї не влучили ні перша ні друга гармати. Тоді $P(C)=1-0.2\cdot 0.3=0.94$.

Яким би способом не розв'язували задачу, відповідь однакова.

Завдання 3.2: У майстерні три інструменти. Перший інструмент допускає 3% браку, другий – 2%, а третій – 1%. Знайти ймовірність наступних подій: *A* – лише перший інструмент допустить брак; *B* – лише один інструмент допустить брак; *C* – хоч би один інструмент допустить брак; *D* – лише два інструменти допустять брак; *E* – хоч би два інструменти допустять брак; *F* – всі три інструменти допустять брак; G – жоден інструмент не допустить брак.

Рішення. Введемо наступні позначення: B_1 – брак допущений першим інструментом, B_2 – брак допущений другим інструментом, B_3 – брак допущений третім інструментом, $\overline{B_1}$ – перший інструмент не зіпсував деталь, $\overline{B_2}$ – другий інструмент не зіпсував деталь, $\overline{B_3}$ – третій інструмент не зіпсував деталь. Тоді $P(B_1)=p_1=0.03$, $P(B_2)=p_2=0.02$, $P(B_3)=p_3=0.01$, $P(\overline{B_1})=q_1=0.97$, $P(\overline{B_2})=q_2=0.98$, $P(\overline{B_3})=q_3=0.99$.

Подія *A* полягає в тому, що перший інструмент допустить брак, а другий і третій брак не допустять $P(A)=p_1\cdot q_2\cdot q_3=0.03\cdot 0.98\cdot 0.99=0.029106$.

Подія *B* полягає в тому, що допустить брак може лише один інструмент (або перший або другий або третій), а два інші при цьому браку не допустять

$$P(B)=p_1\cdot q_2\cdot q_3+q_1\cdot p_2\cdot q_3+q_1\cdot q_2\cdot p_3=0.03\cdot 0.98\cdot 0.99+$$
$$+0.97\cdot 0.02\cdot 0.99+0.97\cdot 0.98\cdot 0.01=0.029106+0.019206+0.009506=0.057818..$$

Подія *C* (хоч би один інструмент допустить брак) полягає в тому, що брак може допустити один або два або всі три інструменти, тому $C=B\cup D\cup F$, причому події *B*, *D*, *F* є несумісними. Спочатку знайдемо ймовірність подій *D* і *F*, потім знайдемо *C*.

$$P(D)=p_1\cdot p_2\cdot q_3+q_1\cdot p_2\cdot p_3+p_1\cdot q_2\cdot p_3=0.03\cdot 0.02\cdot 0.99+0.97\cdot 0.02\cdot 0.01+$$
$$+0.03\cdot 0.98\cdot 0.01=0.000594+0.000194+0.000294=0.001082.$$

$$P(F)=p_1\cdot p_2\cdot p_3=0.03\cdot 0.02\cdot 0.01=0.000006.$$

$$P(C)=P(B)+P(D)+P(F)=0.057818+0.001082+0.000006=0.058906.$$

$$P(E)=P(D)+P(F)=0.001082+0.000006=0.001088$$

$$P(G)=q_1\cdot q_2\cdot q_3=0.97\cdot 0.98\cdot 0.99=0.941094.$$

Події C і G є протилежними $C=\overline{G}$ і $G=\overline{C}$, дійсно $P(C)+P(G)=0.058906+0.941094=1$ (теорема 3).

Події *B, D, F і G* складають повну групу подій, отже:

$$P(B)+P(D)+P(F)+P(G)=0.057818+0.001082+0.000006+0.941094=1$$

Якщо необхідно знайти ймовірність, що дана подія настане хоч би один раз, то найпростіше спочатку обчислити ймовірність протилежної події, (тобто ймовірність. що дана подія не настане жодного разу), а потім відняти її від одиниці $P(C)=1-P(G)=1-0.941094=0.058906$.

Завдання 3.3: У коробці лежать 3 червоних, 5 білих і 2 чорних кульки. З коробки навмання виймають дві кульки. Яка ймовірністьність того, що *A* – обидві кульки будуть однаковими, *B* – обидві кульки різнокольорові?
Рішення. Загальна кількість кульок в ящику $n=3+5+2=10$.

A: обидві кульки однакові – обидві червоні або обидві білі або обидві чорні, тому $P(A)=\dfrac{C_3^2+C_5^2+C_2^2}{C_{10}^2}=\dfrac{14}{45}$.

B: обидві кульки різні – червона і біла, або червона і чорна, або біла і чорна: $P(B)=\dfrac{C_3^1\cdot C_5^1+C_3^1\cdot C_2^1+C_5^1C_2^1}{C_{10}^2}=\dfrac{31}{45}$. Або з використанням умовної ймовірності, наприклад перша червона і друга біла або перша червона і друга чорна або перша біла і друга чорна плюс поміняти першу і другу місцями одержимо $P(B)=2\cdot\left(\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{5}{9}+\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{10}\cdot\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{31}{45}$

Завдання 3.4: Серед 25 студентів є 5 відмінників та 3, що вчаться на «добре», решта вчаться на «задовільно». Для туристичного походу обирають групу з 10 студентів.

а) яка ймовірність того, що в неї потраплять *3* відмінника та *2*, що добре вчаться?

б) яка ймовірність того, що в нійне буде не тих не інших?

Рішення.

а) нехай *А* – полягає в тому, що до групи з 10 студентів потрапляють *3* відмінника, *2* студенти, що добре вчаться, та *5* студентів, що вчаться задовільно.

Множіну елементарних подій даного випробування утворюють всі можливі сполученняз *25* студентів по *10,* $n=C_{25}^{10}$.

Віпадки, що сприяють події *А,* це всі сполучення які містять *3* з *5* відмінників та *2* з *3* студентів, що добре вчаться, та *5* з *17 (25-5-3*) студентів, що вчаться задовільно. Тоді число таких випадків, що сприяють події *А,* дорівнює $\mathrm{m}=\mathrm{C}_5^3\cdot\mathrm{C}_3^2\cdot\mathrm{C}_{17}^5$. Отже

$$P(A)=\frac{C_5^3\cdot C_3^2\cdot C_{17}^5}{C_{25}^{10}}=\frac{\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\dfrac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\dfrac{17!}{5!\cdot 12!}}{\dfrac{25!}{10!\cdot 15!}}=$$

$$=\frac{10!\cdot(15\cdot 14\cdot 13)}{2!\cdot 2!\cdot(25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18)}=0{,}0568;$$

б) нехай *В* полягає в тому, що до групи не потраплять відмінники та студенти, що добрі вчаться.

Множіну елементарних подій даного експерименту утворюють всі можлив сполучення з *25* студентів по *10* $n = C_{25}^{10}$.

Віпадки, що сприяють події *В* це всі сполучення, які не містять відмінників та студентів, що добре вчаться, тобто це студенти, що вчаться задовільно (їх 17).

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_{17}^{10}}{C_{25}^{10}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} = 0{,}0059.$$

Тема 4. Знаходження ймовірності подій за допомогою простору подій

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: простір подій, коньюнкция, диз'юнкція і заперечення, знаходження умовної ймовірності, встановлення залежності між подіями.

Простором подій називається довільний набір (множина) елементарних подій таких, що кожному результату випробування відповідає лише один елемент з цього набору (множини).

Гральну кістку підкидають один раз. Побудуваті простір подій.

Віпадання *1, 2, 3, 4, 5,* і *6* очок – це випадки, або елементарні події. Позначимо їх як елементи множини – $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ так що елемент a_1 відповідатиме появі *1*, елемент a_2 відповідатиме появі *2* і так далі.

Тоді U = $\{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \}$ – є безліч елементарних подій, або простір подій.

Для знаходження ймовірності події А за допомогою простору подій досить знайти n – як загальне число елементів простору і m – як число елементів простору, що призводять до появи події *А*, яка нас цікавить.

Завдання 4.1: Гральна кістка підкинута один раз. Побудуваті простір подій і за допомогою його знайти ймовірність наступних подій: *А* – випадання парного числа; *В* – випадання числа менше або рівного ***двом;*** С **–** випадання шести очок.

Завдання 4.2: Гральна кістка підкинута один раз. Побудувати простір подій і за допомогою його знайти ймовірність наступних подій: *A* – випадання парного числа; *B* – випадання числа менше або рівного двом; *C* – випадання шести очок.

Рішення: Простір подій $u = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ звідки *n=6*.

Ймовірність подій:

A – випадання парного числа; $A = \{2, 4, 6\}$; m=3; $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6}$;

B – випадання числа менше або рівного двом; $B = \{1, 2\}$; m=2; $P(A) = \frac{2}{6}$;

C – випадання шести очок; $C = \{6\}$; m=1; $P(A) = \frac{1}{6}$.

Завдання 4.3: Експерімент полягає в підкиданні двох гральних кісток, що відрізняються кольором (біла і червона) і у спостереженні за числом на їх верхніх гранях.

1. Побудуваті простір подій які відповідають експерименту.
2. Знайті ймовірність наступних подій:
   - *A* – на червоній випало *5* очок, а на білій менше *5*;
   - *B* – на одній випало *5* очок, а на іншій менше *5*;
   - *C* – на білій, менше ніж на червоній;

Б \ Ч	*Б1*	*Б2*	*Б3*	*Б4*	*Б5*	*Б6*
Ч1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
Ч2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
Ч3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
Ч 4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
Ч 5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
Ч 6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

3. Знайдемо за допомогою простору подій ймовірність події *A* – на червоній випало *5* очок, а на білій менше *5*.

Б / Ч	<u>***Б1***</u>	<u>***Б2***</u>	<u>***Б3***</u>	<u>***Б4***</u>	*Б5*	*Б6*
Ч1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
Ч2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
Ч3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
Ч4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
<u>***Ч5***</u>	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
Ч6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

Таким чином, $m_A = 4$, $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$;

В – на одній випало 5, а на іншій менше 5.

$$m_B = 8\text{, а } P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9};$$

С – на білій менше, ніж на червоній.

$$m_C = 15\text{, а } P(C) = \frac{15}{36}.$$

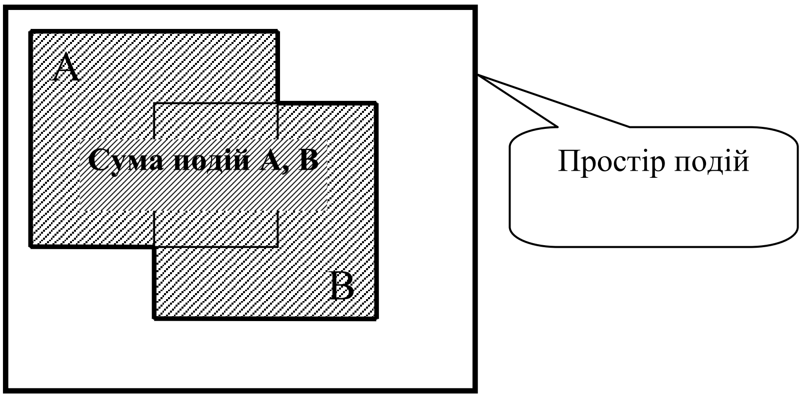
Б / Ч	*Б1*	*Б2*	*Б3*	*Б4*	*Б5*	*Б6*
Ч1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
Ч2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
Ч3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
Ч4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
Ч5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
Ч6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

Б / Ч	*Б1*	*Б2*	*Б3*	*Б4*	*Б5*	*Б6*
Ч1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
Ч2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
Ч3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
Ч4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
Ч5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
Ч6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

Подія В

Подія С

Операція сума на просторі подій позначається значком $\cup$ (об'єднання).



Як приклад знайдемо суму подій B і C із завдання 4.2. Хай подія $D = B \cup C$ – або на одній кістці випало *5* очок, а на іншій менше *5*, або на білій кістці очок менше, ніж на червоній.

Б \ Ч	*Б1*	*Б2*	*Б3*	*Б4*	*Б5*	*Б6*
Ч1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
Ч2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
Ч3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
Ч4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
Ч5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
Ч6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

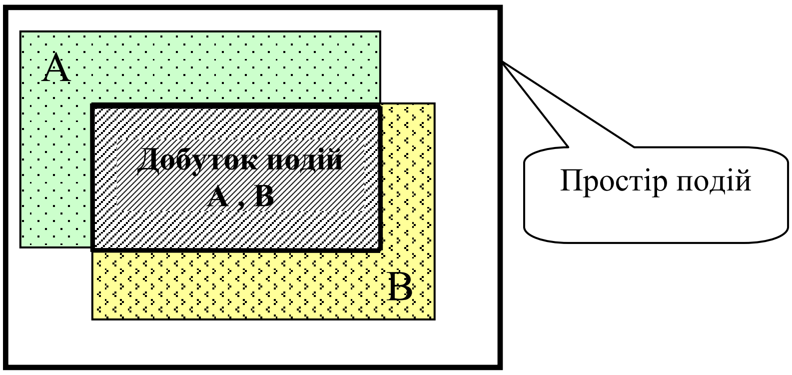
$$P(D) = \frac{19}{36}.$$

Аби знайти ймовірність події $\overline{A}$, протилежної A, необхідно порахувати всі клітинки не сприяючі події A .

Ч \ Б	*Б1*	*Б2*	*Б3*	*Б4*	*Б5*	*Б6*
Ч1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
Ч2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
Ч3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
Ч4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
Ч5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
Ч6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

$$P(\overline{A}) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}.$$

Операція добуток на просторі подій позначається значком $\cap$ (пересічення).



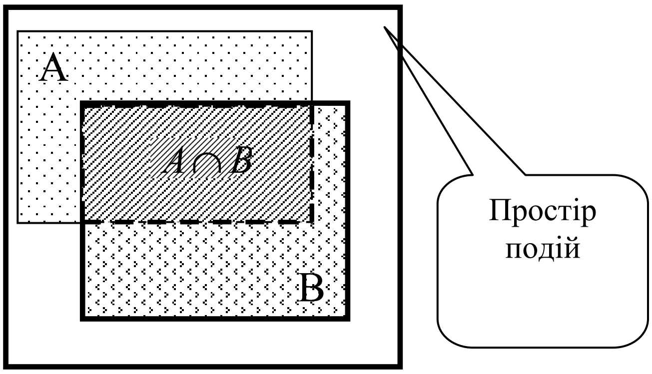
Як приклад знайдемо добуток подій *B* і *E* із завдання 4.2. Нехай подія $E = B \cap C$ – на одній кістці випало 5 очок на іншій менше 5 і на білій кістці очок менше, ніж на червоній.

Ч \ Б	*Б1*	*Б2*	*Б3*	*Б4*	*Б5*	*Б6*
Ч1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
Ч2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
Ч3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
Ч4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
Ч5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
Ч6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

Вийшло, що події *A* і *E* співпадають $P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

<u>Умовною ймовірнистю називають ймовірність події А, при умові, що подія В вже настала.</u>

$$P_B(A)=\frac{N_{A\cap B}}{N_B},$$



де – кількість елементів, складових пересічення *A* і *B*;

N_B – кількість елементів, складових події *B*.

Знайдемо умовну ймовірність $P_B(C)$, тобто ймовірність того, що на одній кістці випало *5*, а на іншій менше *5*, **за умови,** що на білій кістці очок менше, ніж на червоній.

Умовна ймовірність $P_C(B)$ – ймовірність того, що на білій кістці менше ніж на червоній, за умови, що на одній кісті випало *5*, а на іншій менше *5*.

Б / Ч	*Б1*	*Б2*	*Б3*	*Б4*	*Б5*	*Б6*
Ч1						
Ч2	2+1					
Ч3	3+1	3+2				
Ч4	4+1	4+2	4+3			
Ч5	5+1	5+2	5+3	5+4		
Ч6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	

Б / Ч	*Б1*	*Б2*	*Б3*	*Б4*	*Б5*	*Б6*
Ч1					1+5	
Ч2					2+5	
Ч3					3+5	
Ч4					4+5	
Ч5	5+1	5+2	5+3	5+4		
Ч6						

$$P_B(C)=\frac{4}{15};\qquad P_C(B)=\frac{4}{8}.$$

Завдання 4.3: У коробці лежать 11 карток, на яких написані літери $\{Ò,Å,Î\ ,Ð,È\ ,ß\}$. Дослід полягає у витяганні *2*-х карток. Побудувати простір подій даного досліду і знайти ймовірність наступних подій: *A* – обидві літери голосні; *B* – перша буква «О»; *C* – друга буква «Я» $D=A\cap B$; $E=A\cup B$; $F=C/A$; $G=A/C$.

Завдання 4.4: У коробці лежать два білих, три чорних і одна зелена кульки. Дослід полягає у витяганні двох кульок. Побудувати простір подій і знайти за допомогою його ймовірність наступних подій: *A* – кулі одноколірні; *B* – кулі різноколірні.

.Рішення: (2-й спосіб - з використанням простору подій).

	Б1	*Б2*	*Б3*	*Б4*	***Ч1***	***Ч2***	***Ч3***
Б1	---	ББ	ББ	ББ	**БЧ**	**БЧ**	**БЧ**
Б2	ББ	---	ББ	ББ	**БЧ**	**БЧ**	**БЧ**
Б3	ББ	ББ	---	ББ	**БЧ**	**БЧ**	**БЧ**
Б4	ББ	ББ	ББ	---	**БЧ**	**БЧ**	**БЧ**
Ч1	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	---	**ЧЧ**	**ЧЧ**
Ч2	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧЧ**	---	**ЧЧ**
Ч3	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧЧ**	**ЧЧ**	---

Позначимо події:

A: обидві кулі – білі

B: обидві кулі – чорні

C: кулі –різноколірні.

Виділимо елементи простору подій кольорами відповідно до подій *A*, *B*, *C*.

	Б1	*Б2*	*Б3*	*Б4*	***Ч1***	***Ч2***	***Ч3***
Б1	---	ББ	ББ	ББ	**БЧ**	**БЧ**	**БЧ**
Б2	ББ	---	ББ	ББ	**БЧ**	**БЧ**	**БЧ**
Б3	ББ	ББ	---	ББ	**БЧ**	**БЧ**	**БЧ**
Б4	ББ	ББ	ББ	---	**БЧ**	**БЧ**	**БЧ**
Ч1	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	---	**ЧЧ**	**ЧЧ**
Ч2	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧЧ**	---	**ЧЧ**
Ч3	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧБ**	**ЧЧ**	**ЧЧ**	---

$$P(A) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7};$$

$$P(B) = \frac{6}{42} = \frac{1}{7};$$

$$P(C) = \frac{24}{42} = \frac{4}{7};$$

Таким чином, ймовірність того, що обидві кулі будуть білими, складе 2/7, ймовірність того, що обидві кулі будуть чорними, складе 1/7, і ймовірність того, що кулі будуть різноколірними, складе 4/7. Ця подія є найбільш ймовірною.

Тема 5. Алгебра гіпотез

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: апріорна ймовірністі гіпотези, апостеріорна ймовірність гіпотези, формула повної ймовірності, формула Байеса.

Гіпотезі – це припущення про умови досліду, які виключають одна одну.
Гіпотезі є випадковим подіями.
Всі гіпотези відносно якогось досліду складають повну групу подій. Отже

❖**Теорема 7.** ***Якщо деяка подія А може статися лише з однією з повної групи неспільних подій (гіпотез) Hi (i=1,…,n) і відомі апріорна ймовірність P(Hi) кожної гіпотези і умовна ймовірность P(A/Hi), то повна, або середня, ймовірність події А визначається за формулою повної ймовірності*:**

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+....+P(H_n)\cdot P(A/H_n)$$

Формула Байеса використовується в тих же умовах, що і формула повної ймовірності. Єдина відмінність полягає в тому, що подія А вже сталася.

Формула Байеса дозволяє визначати апостеріорну (після досліду) ймовірність гіпотез $P(H_j/A)$, j = 1,…,n, тобто умовну ймовірність гіпотез за умови, що подія А вже сталося.

❖**Теорема 8.** ***Якщо деяка подія А може статися лише з однією з повної групи неспільних подій (гіпотез) H_i (i=1,n) і відомі апріорна ймовірністі гіпотез $P(H_i)$, умовна ймовірність $P(A/H_i)$, а також відомо, що подія А вже сталася, то апостеріорна ймовірність гіпотези H_i визначається за формулою Байеса:***

$$P(H_i\,/\,A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

де $P(A)$ – повна ймовірність події А, $P(H_i)$ – апріорна (додослідна) ймовірність гіпотези, а $P(H_i\,/\,A)$ – апостеріорна (післядослідна) ймовірність гіпотези.

Завдання 5.1. Одну й теж операцію виконують робітники 3 і 4 розрядів. При цьому робітники, що мають 4 розряд, допускають всього 2% браку, а 3-го – 5% браку.

a) визначити середню ймовірність випуску стандартної деталі.

b) при перевірці деталь виявилася стандартною. Яка ймовірність того, що її виготовив робітник 4 розряду, якщо з 5 робітників, що виконують дану операцію, двоє мають 4 розряд і останні – 3 розряд?

Рішення. Введемо позначення:

А – деталь виявилася бракованою; $\overline{A}$ – деталь стандартна.

Гіпотеза H_1 –деталь виготував робітник 3-го розряду;

Гіпотеза H_2–деталь виготував робітник 4-го розряду;

Ймовірність гіпотез, виходячи з умови прикладу, складе: $P(H_1)= 3 / 5 = 0,6;$ $P(H_2)= 2 / 5 = 0,4$;

Умовні ймовірності події A і $\overline{A}$ відповідно завдання: $P(A/H_1)=0,05;$ $P(A/H_2)=$ $=0,02;$ $P(\overline{A}/H_1)=0,95;$ $P(\overline{A}/H_2)=0,98.$

a) за формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)+ P(A/H_2)\cdot P(H_2)=0,05\cdot 0,6+0,02\cdot 0,4=0,038.$$

b) За формулою Байеса маємо: $P(H_2/\overline{A})=\dfrac{P(H_2)\cdot P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})}$, де

$$P(\overline{A})= P(\overline{A}/H_1)\cdot P(H_1)+ P(\overline{A}/H_2)\cdot P(H_2)= =0,95\cdot 0,6+0,98\cdot 0,4=0,57+0,392=0,962,$$

$$\text{або } P(\overline{A})=1- P(A)=1-0,038=0,962$$

$$P(H_2/\overline{A})=\frac{0,4\cdot 0,98}{0,962}=0,392/0,962=0,407$$

Завдання 5.1. Деталь виготовляється трьома автоматами. Ймовірності браку для кожного автомату відповідно дорівнюють 0,1; 0,2; 0,15. Узята деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена другим автоматом?

Рішення.

Позначимо події:

A – узята деталь виявилася бракованою;

B_1– деталь виготовлена на першому автоматі;

B_2– деталь виготовлена на другому автоматі;

B_3– деталь виготовлена на третьому автоматі;

Нам необхідно визначити умовну ймовірність події B_2, якщо подія A відбулася, тобто величину $P(B_2/A)$.

Події B_1, B_2 і B_3 несумісні і утворюють повну групу. Подія A завжди відбувається одночасно з однією з подій B_1, B_2 або B_3. Тому події B_1, B_2 і B_3 можемо прийняти як гіпотези і для обчислення ймовірності $P(B_1/A)$ застосувати формулу Бейеса.

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}_i/\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}_i)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}_i)}{\sum\limits_{i=1}^{3}\mathrm{P}(\mathrm{B}_i)\cdot \mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}_i)}$$

З умови завдання знаходимо

$$P(\hat{A}_1)=P(\hat{A}_2)=P(\hat{A}_3)=\frac{1}{3}$$

Для кожного автомату нам відома ймовірність браку, тому

$$P(\grave{A}/\hat{A}_1)=0,1;\ P(\grave{A}/\hat{A}_2)=0,2;\ P(\grave{A}/\hat{A}_3)=0,15.$$

Тепер можемо обчислити значення $P(B_2/A)$:

$$P(B_2/A)=\frac{P(B_2)\cdot P(A/B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P(A/B_i)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}2}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2+\frac{1}{3}\cdot 0{,}15}=0{,}444.$$

Завдання 5.2. На столі стоять два ящики. У першому ящику знаходиться 2 білих і 3 червоних кульки, а в другому 1 біла і 5 червоних кульок. З першого ящика в другий перекладають 3 кульки, потім з другого ящика дістають одну кульку.

а) знайти ймовірність того, що кулька, що дістали з другого ящика, виявилася білою;

б) знайти найбільш ймовірну комбінацію куль, перекладених з першого ящика в другий, якщо куля, що дістали з другого ящика, виявилася білою.

Рішення.

А – кулька виявилася білою;
Гіпотеза H_1 –з першого ящику переклали у другий 3 червоні кульки;
Гіпотеза H_2– з першого ящику переклали у другий 2 червоні і 1 білу кульки;
Гіпотеза H_3– з першого ящику переклали у другий 1 червону і 2 білі кульки

Ймовірність гіпотез, виходячи з умови прикладу, складе: $P(H_1)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$;

$$P(H_2)=\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_5^3}=\frac{3\cdot 2}{10}=\frac{6}{10};\quad P(H_3)=\frac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}=\frac{3\cdot 1}{10}=\frac{3}{10}$$

Умовні ймовірності події A відповідно складу другого ящику при гіпотезах:

$P(A/H_1)=8/9;\ P(A/H_2)=2/9;\ P(A/H_3)=3/9$.

а) за формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)+P(A/H_2)\cdot P(H_2)+P(A/H_3)\cdot P(H_3)=\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{10}+\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{10}+\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{10}=\frac{29}{90}.$$

b) За формулою Байеса обчислимо апостеріонні ймовірності всіх гіпотез:

$$P(H_1/A)=\frac{\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{29}{90}}=\frac{8}{29};\quad P(H_2/A)=\frac{\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{29}{90}}=\frac{12}{29};\quad P(H_3/A)=\frac{\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{29}{90}}=\frac{9}{29}$$

Таким чином, найбільш ймовірною комбінацією куль, перекладених з першого ящика в другий за гіпотезою H_2 є така : з першого ящику переклали у другий 2 червоні і 1 білу кульки

Тема 6. Схема незалежних випробувань

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: незалежні випробування, биномиальный експеримент, формула Бернуллі, теореми Муавра -Лапласа.

Якщо проводиться декілька дослідів, причому ймовірність події *A* в кожному досліді не залежить від результатів інших дослідів, то такі досліди називають незалежними відносно *A*.

Біноміальний експеримент.

Біноміальний експеримент складається з серії незалежних випробувань, кожне з яких приводить або до успіху, або до невдачі, тобто в кожному експерименті всього два можливі результати – звідси і назва: біноміальний.

Щоб експеримент розглядався як біноміальний і відповідав схемі Бернуллі, необхідне виконання наступних умов:

1) експеримент повинен складатися з фіксованої кількості випробувань n;
2) кожне випробування приводить або до успіху, або до невдачі (лише 2 результати);
3) випробування мають бути незалежними одне від одного;
4) ймовірність успіху – p (невдачі – q) має бути постійною для всіх випробувань.

❖*Теорема 9. Формула Бернуллі*

Якщо проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A з'являється з однаковою ймовірностю p, то ймовірність того, що в цих випробувань подія A станеться рівно k разів (байдуже, в якій послідовності) визначається за формулою $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ **.**

Якщо кількість незалежних випробувань досить велика, замість формули Бернуллі доцільно користуватися локальною і інтегральною теоремами Лапласа, які дають приблизний результат, який тим ближче до результату формули Бернуллі, чим більше кількість випробувань.

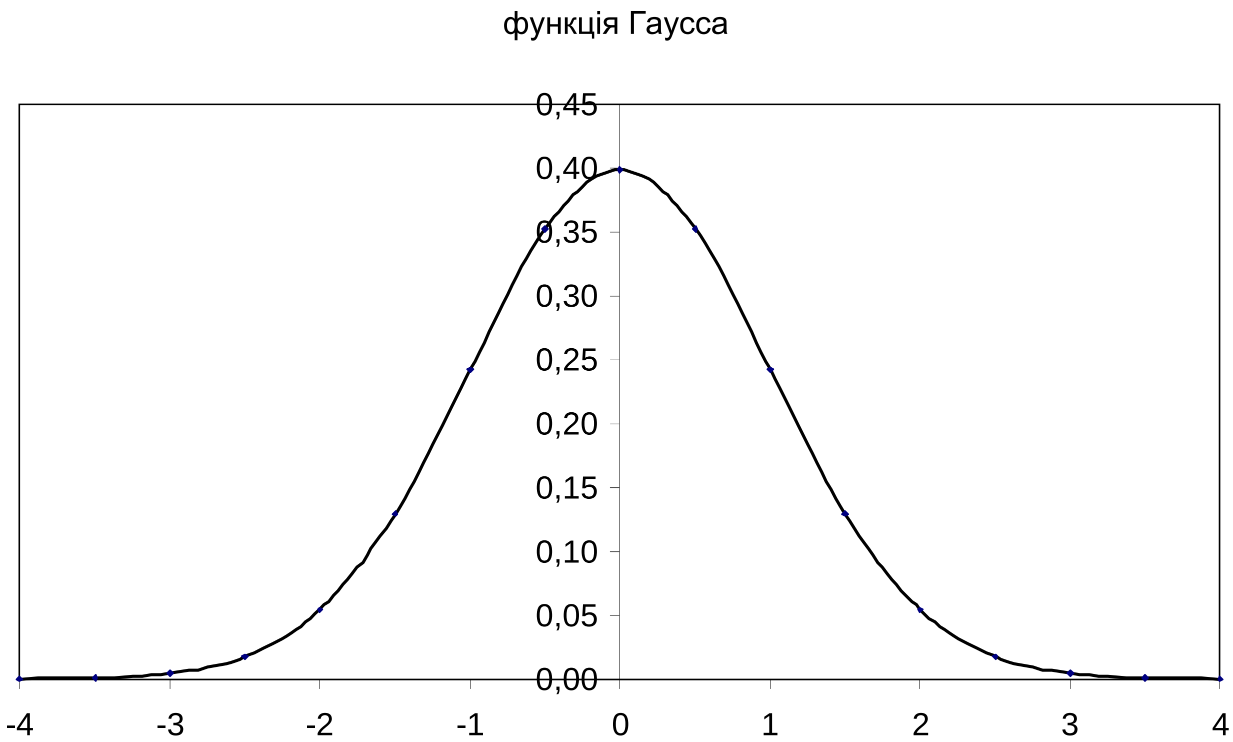
Теореми Муавра-Лапласа

❖*Теорема 10. Локальна теорема Лапласа*

Якщо відбуваються n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A станеться рівно k раз (байдуже, в якій послідовності) може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \varphi(x),$$

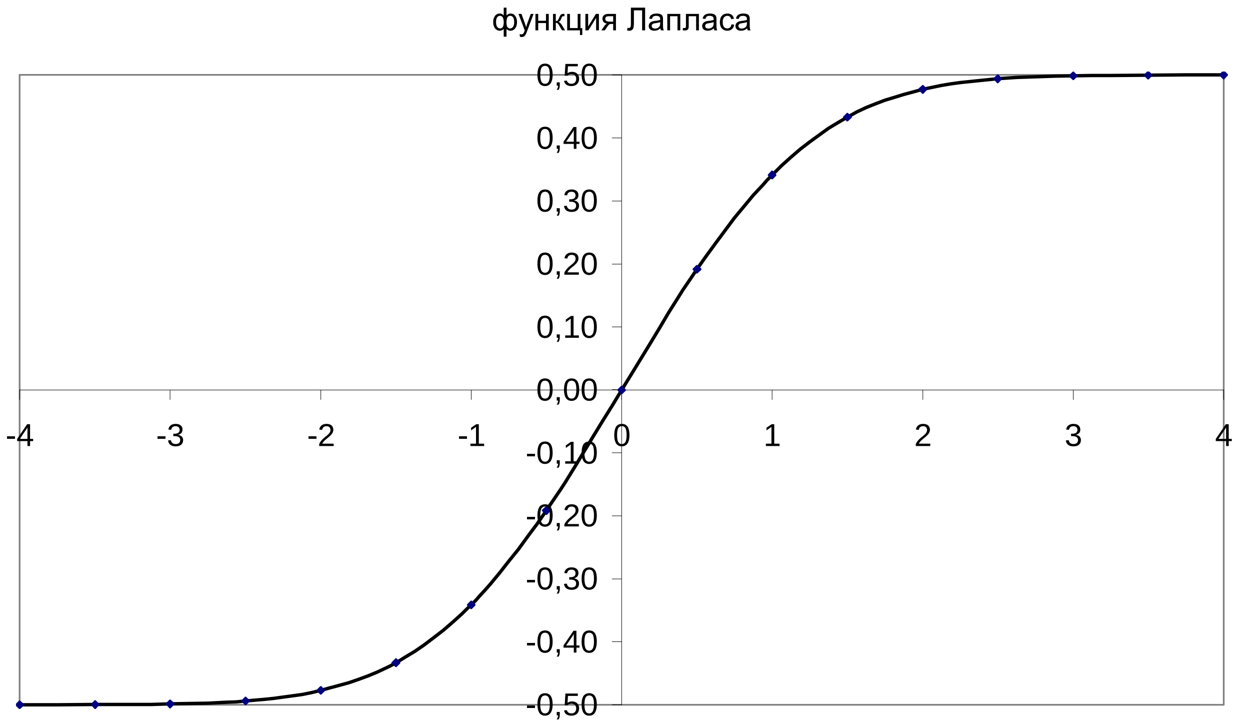
де $x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $q = 1 - p$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, парна функція: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.



❖ ***Теорема 11. Інтегральна теорема Лапласа***

Якщо відбуваються n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A з'являється з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A станеться не менше k_1 разів і не більш k_2 разів (байдуже, в якій послідовності) може бути оцінена (тим точніше, чим більше n) за формулою $P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$***, де*** $x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$***, де***

$x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$**,** $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – непарна функция: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.



Завдання 6.1: Ймовірність появи події в кожному із незалежних іспитів дорівнює 0,63. Знайти ймовірність того, що в 10 незалежних іспитах подія з'явиться не менше 6 і не більше 9 разів.

Рішення.

Проводитися ряд незалежних іспитів у кожному з яких може відбутися подія *A*. Отже для розв'язання завдання можна скористатися формулою Бернуллі.

Кількість незалежних іспитів *n=10*.

Кількість іспитів, у яких відбудеться подія *A*, може приймати значення від 6 до 9. Ймовірність того, що відбудеться подія *A* в одному іспиті *p=0,63*.

За формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

Отримаємо

$$P_{10}(6 \le m \le 9) = P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9)$$

$$P_{10}(6) = C_{10}^6 \cdot p^6 \cdot (1-p)^{10-6} = \frac{10!}{6!\cdot 4!} \cdot (0{,}63)^6 (1-0{,}63)^4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \cdot (0{,}63)^6 (0{,}37)^4 = 0{,}246$$

$$P_{10}(7) = C_{10}^7 \cdot p^7 \cdot (1-p)^{10-7} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} \cdot (0{,}63)^7 (1-0{,}63)^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} \cdot (0{,}63)^7 (0{,}37)^3 = 0{,}239$$

$$P_{10}(8) = C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot (1-p)^{10-8} = \frac{8!}{8!\cdot 2!} \cdot (0{,}63)^8 (1-0{,}63)^2 = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} \cdot (0{,}63)^8 (0{,}37)^2 = 0{,}153$$

$$P_{10}(9) = C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot (1-p)^{10-9} = 9 \cdot (0{,}63)^9 (1-0{,}63)^1 = 9 \cdot (0{,}63)^9 \cdot 0{,}37 = 0{,}052$$

$$P_{10}(6 \le m \le 9) = 0{,}246 + 0{,}239 + 0{,}153 + 0{,}052 = 0{,}69\,.$$

***Завдання 6.2*:** Визначити ймовірність того що при сімиразовому киданні кубика парне число очок з'явиться не менше 5 разів.

<u>*Рішення.*</u>

Для даного завдання іспит – це кидання грального кубика. Таких іспитів проводиться сім. В кожному з іспитів може відбутися подія А, що полягає у випадінні парного числа очок. Іспити незалежні, оскільки ймовірність події *A* в будь-якому з дослідів не залежить від результатів інших. Ймовірність події *A* в кожному з іспитів однакова і дорівнює 1/3. Отже для розв'язання завдання ми можемо скористатися формулою Бернуллі.

Кількість незалежних іспитів $n=7$.

Кількість іспитів, у яких відбудеться подія А, може приймати значення від 0 до 5.

За формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

Тоді отримаємо

$$P_7(0 \le m \le 5) = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2) + P_7(3) + P_7(4) + P_7(5)$$

або скористуємося протилежною подією

$$P_7(0 \le m \le 5) = 1 - P_7(7) - P_7(6)$$

$$P_7(7) = C_7^7 \cdot p^7 \cdot (1-p)^{7-7} = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 0{,}000457$$

$$P_7(6) = C_7^6 \cdot p^6 \cdot (1-p)^{7-6} = 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^1 = 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}0064$$

$$P_7(0 \le m \le 5) = 1 - 0{,}000457 - 0{,}0064 = 0{,}993143$$

***Завдання 6.3*:** Ймовірність появи події у кожному з однакових та незалежних іспитів дорівнює 0,75. Знайті ймовірність того, що в 150 іспитах подія настане рівно 45 разів. Знайті ймовірність того, що в 150 іспитах подія настане не менше 50 і не більше 70 разів.

<u>*Рішення.*</u>

За умовою проводитися 150 незалежних дослідів. В кожному з яких може відбутися подія, ймовірність якої не залежить від результатів решти дослідів. Таким чином, досліди незалежні. Оськільки число дослідів велике, то для розв'язання завдання слід скористатися локальною і інтегральною теоремами Лапласа.

1) використовуємо локальну теорему Лапласа. Ймовірність того, що при *n* дослідах подія відбудеться *m* разів визначається за формулою

$$P_n(m)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}},$$

де $x=\dfrac{m-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, $q=1-p$

$n=150$, $m=45$, $p=0{,}75$, $q=1-p=1-0{,}75=0{,}25$

$$x=\frac{45-150\cdot 0{,}75}{\sqrt{150\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}=\frac{-67{,}5}{\sqrt{28{,}125}}=\frac{-67{,}5}{5{,}303}=-12{,}729$$

По таблиці знаходимо значення $\varphi(x)$

$\varphi(-12{,}729)=\varphi(12{,}729)=0$

$$P_{150}(45)=\frac{0}{5{,}303}=0.$$

2) використовуємо інтегральну теорему Лапласа. Ймовірність того, що при *n* іспитах подія відбудеться від k_1 до k_2 разів визначається за формулою:

$$P_n(k_1;k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

Де $n=150$, $k_1=50$, $k_2=70$, $p=0{,}75$, $q=0{,}25$

$$x_1=\frac{50-150\cdot 0{,}75}{\sqrt{150\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}=\frac{-62{,}5}{\sqrt{28{,}125}}=\frac{-62{,}5}{5{,}303}=-11{,}786$$

$$x_2=\frac{70-150\cdot 0{,}75}{\sqrt{150\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}=\frac{-42{,}5}{\sqrt{28{,}125}}=\frac{-42{,}5}{5{,}303}=-8{,}014$$

По таблиці знаходимо значення $\Phi(x)$

$\Phi(-11{,}786)=-\Phi(11{,}786)=-0{,}5$

$\Phi(-8{,}014)=-\Phi(8{,}014)=-0{,}5$

$$P_{150}(50;70)=-0{,}5-(-0{,}5)=0.$$

***Завдання 6.4*: Схожість насіння даної рослини складає 90%.**

1. Знайти ймовірність того, що з 4 посіяних насінин зійде рівно 3;
2. Знайти ймовірність того, що з 4 посіяних насінин зійде не менше 3;
3. Знайти ймовірність того, що з 4 посіяних насінин зійде менше 3;
4. Знайти ймовірність того, що з 4 посіяних насінин зійде хоч би одна насінина;
5. Знайти наймовірніше число насінин, що зійшло.

Рішення.

1) $P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^1 =$ *0.2916*

2) $P(k \geq 3) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^1 + 0,9^4 =$ *0,2916+0,6561=0,9477.*

3) $P_4(k < 3) = 1 - P(k \geq 3) = 1 - 0{,}9477 = 0{,}0523$.

4) $P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) = 1 - C_4^0 \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^4 = 1 - 0,0001 = 0,9999$.

5) $4 \cdot 0,9 - 0,1 \leq k \leq 4 \cdot 0,9 + 0,9 \Rightarrow k_0 = 4$

Завдання 6.5: На автобазі є 12 автомашин. Ймовірність виходу на лінію кожної з них дорівнює 0,9. Знайти ймовірність нормальної роботи автобази в найближчий день, якщо для цього необхідно мати на лінії не менше 8 автомашин;

Рішення.

$P(k \geq 8) = P_{12}(8) + P_{12}(9) + P_{12}(10) + P_{12}(11) + P_{12}(12) =$

$C_{12}^8 \cdot 0,9^8 \cdot 0,1^4 + C_{12}^9 \cdot 0,9^9 \cdot 0,1^3 + C_{12}^{10} \cdot 0,9^{10} \cdot 0,1^2 + C_{12}^{11} \cdot 0,9^{11} \cdot 0,1^1 + 0.9^{12} =$

0,0213+0,0852+0,2301+0,3766+0,2824=0,9957.

***Завдання 6.6*:** Ймовірність випуску радіолампи з дефектом дорівнює 0,03.

Знайти

1) наймовірніше число бездефектних ламп в партії з 200 штук;
2) ймовірність наймовірнішого числа бездефектних ламп.
3) ймовірність того, що в цій партії число ламп з дефектами не перевищує 10.

Рішення:

Події: А– радіолампа без дефекту *P(A)=p=1-0,03=0,97,* $\overline{A}$ – радіолампа з дефектом $P(\overline{A})$*=0,03;*

1) k_0 визначається за формулою:

$np - q \leq k_0 \leq np + p$ ® $0,97 \cdot 200 - 0,03 \leq k_0 \leq 0,97 \cdot 200 + 0,97$ ® $k_O = 194$

2) за диференціальною формулою Лапласа: $P_n(k) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, де $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

$\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,97 \cdot 0,03} = \sqrt{5,82} = 2,41$, $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{194 - 200 \cdot 0,97}{\sqrt{200 \cdot 0,97 \cdot 0,03}} = 0$; *J(0)=0,3989*

$P_{200}(194) = \dfrac{1}{\sqrt{200 \cdot 0,97 \cdot 0,03}} \varphi(0) = \dfrac{0,3989}{2,41} = 0,166$.

3) за інтегральною формулою Лапласа: $P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, де $k_1=0,\ k_2=10,$

$x_1=\dfrac{k_1-nq}{\sqrt{npq}}=\dfrac{0-200\cdot 0,03}{\sqrt{200\cdot 0,97\cdot 0,03}}=-\dfrac{6}{2,41}=-2,49$ $x_2=\dfrac{k_2-nq}{\sqrt{npq}}=\dfrac{10-200\cdot 0,03}{\sqrt{200\cdot 0,97\cdot 0,03}}=\dfrac{4}{2,41}=1,66$ P=

$P_n(0,10)=\Phi(1,66)-\Phi(-2,49)=0,4515+0,4938=0,9453$

Завдання 6.7: Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,4. Знайти наймовірніше число промахів з 320 пострілів. Знайти ймовірність того, що при 320 пострілах буде

1. 120 попадань?
2. не менше 120 попадань?

Рішення:

Події: A– попадання $P(A)=p=0,4$, $\overline{A}$– промах $P(\overline{A})=1-0,4=0,6;$

1) k_0 визначається за формулою:

$np-q\le k_0\le np+p$ ® $0,4\cdot 320-0,6\le k_0\le 0,4\cdot 320+0,4$ ® $k_O=128$

2) за диференціальною формулою Лапласа: $P_n(k)=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, де $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

$\sqrt{npq}=\sqrt{320\cdot 0,4\cdot 0,6}=\sqrt{76,8}\approx 8,76$, $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{120-320\cdot 0,4}{\sqrt{320\cdot 0,4\cdot 0,6}}\approx\dfrac{-8}{8,76}\approx -0,91;$

$J(-0,91)=0,2661$ $P_{320}(120)=\dfrac{1}{\sqrt{320\cdot 0,4\cdot 0,6}}\varphi(-0,91)=\dfrac{0,2661}{8,76}=0,03.$

4) За інтегральною формулою Лапласа: $P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, де $k_1=120,$ $k_2=320,$

$x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{120-320\cdot 0,4}{\sqrt{320\cdot 0,4\cdot 0,6}}\approx\dfrac{-8}{8,76}\approx -0,91$ $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{320-320\cdot 0,4}{\sqrt{320\cdot 0,4\cdot 0,6}}\approx\dfrac{192}{8,76}\approx 21,9$

5) P= $P_{320}(120,320)=\Phi(21,9)-\Phi(-0,91)=0,5+0,3186=0,8186$

Тема 7. Дискретні випадкові величини

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: типи випадкових величин, закони розподілу дискретних випадкових величин, ряд розподілу ВВ, багатокутник і спектр розподілу, формули знаходження числових характеристик дискретних випадкових величин.

Числовою випадковою подією називається випадкова подія, яка виявляється в появі деякого числа.

Повна група числових подій називається ***випадковою величиною***, а самі ці події – значеннями випадкової величини.

Випадковою називають *величину*, яка в результаті іспиту набуває якого-небудь значення, заздалегідь невідомо якого.

Випадкову величину називають *дискретною*, якщо її можливі значення можна перенумерувати. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або нескінченним лічильним. Значення дискретної випадкової величини розташовуються на числовій осі ізольовано одне від іншого.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідною їм ймовірністю.

Випадкові величини в цілому помічають великими латинськими буквами, а конкретні можливі значення – відповідними малими. Наприклад, запис $X = x_i$ означає, що величина X набуває конкретного значення x_i, а запис $P(X = x_i)$ означає ймовірність для випадкової величини X набути значення x_i.

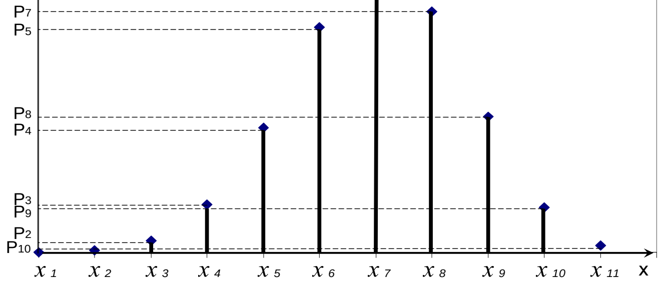
<u>Закон розподілу ДВВ представляють у вигляді ряду розподілу.</u>

Ряд розподілу **–** це таблиця, в якій представлені можливі значення випадкової величини і ймовірність їх настання:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n	*– значення ДВВ*
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n	*– ймовірності*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Графічно закон розподілу ДВВ зображається у вигляді спектру розподілу.



Функция розподілу і функція щільності випадкової величини

Функцією розподілу випадкової величини X називають функцію $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення менше ніж x:

$F(x) = P\{X < x\}$.

Функція розподілу дискретної випадкової величини

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3 \\ \cdots & \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1} \le x < x_n \\ 1, & x \ge x_n \end{cases}$$

Звичайно в літературі $F(x)$ називають інтегральною функцією розподілу.

Завдання 7.1: Завдання про здачу будинків в експлуатацію

Знайти закон розподілу у вигляді ряду розподілу випадкової величини X – кількості будинків, зданих в експлуатацію в строк, з 3, що будуються. Ймовірність здачі в експлуатацію в строк для кожного будинку однакова і дорівнює 0,9.

Рішення.

Оскільки ми маємо справу з дискретною випадковою величиною, будуємо ряд розподілу. Для розрахунку ймовірності застосовуємо формулу Бернуллі, оскільки умова завдання відповідає біноміальному експерименту.

$P_1 = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,9^0 \cdot 0,1^3 = 0,001$ $P_2 = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,9^1 \cdot 0,1^2 = 0,027$

$P_3 = P_3(2) = C_3^2 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^1 = 0,243$; $P_4 = P_3(3) = C_3^3 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^0 = 0,729$

Складемо ряд розподілу

X	0	1	2	3
P	0,001	0,027	0,243	0,729

Математичне очікування – це середнє (середнєвиважене по ймовірності) значення випадкової величини: $M(X) = \sum\limits_i x_i \cdot p_i$.

Дисперсія випадкової величини – це математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування.

$$D(X)=\sum_i (x_i-M(X))^2 p_i = M(\tilde{O}^2)-M(\tilde{O})^2.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини це квадратний корінь з дисперсії: $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$

Модою випадкової величини X називається її найбільш ймовірне значення.

Медіаною випадкової величини X називається таке її значення, для якого $P(x<Me)=P(x>Me)=\frac{1}{2}$.

Завдання 7.2: Дискретна випадкова величина X може приймати тільки два значення x_1 і x_2 , до того ж $x_1>x_2$. Відомі: ймовірність p_2 можливого значення x_2, математичне очікування $M(x)$ та дисперсія $D(x)$. Знайті закон розподілу цієї випадкової величини.

Рішення.

З умови $\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$ отримаємо $p_1 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}24 = 0{,}76$.

Побудуємо таблицю розподілу.

X	x_1	x_2
P	*0,76*	*0,24*

Математічне очікування

$$M(x)=\sum_{i=1}^{2} x_i \cdot p_i = 0{,}76x_1 + 0{,}24x_2 = 5{,}4$$

Дисперсія

$$D(x)=M(x^2)-M^2(x)$$

$$M(x^2)=\sum_{i=1}^{2} x_i^{\,2} \cdot p_i = 0{,}76x_1^{\,2} + 0{,}24x_2^{\,2}$$

$$D(x)=0{,}76x_1^{\,2}+0{,}24x_2^{\,2}-5{,}4^2=0{,}6$$

Отрімаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}76x_1 + 0{,}24x_2 = 5{,}4 \\ 0{,}76x_1^{\,2} + 0{,}24x_2^{\,2} - 5{,}4^2 = 0{,}6 \end{cases}$$

Розв'язок системи:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1 = 5{,}835\\ x_2 = 4{,}021\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_1 = 4{,}965\\ x_2 = 6{,}779\end{array}\right.\end{cases}$$

З умови $x_1 > x_2$ отримаємо:

X	*5,835*	*4,021*
P	*0,76*	*0,24*

***Завдання 7.3*:** В урні знаходяться *5* білих і *4* чорних кульки. З урни послідовно виймають кульки, поки не буде вийнята чорна кулька. Розглядається випадкова величина *X* – кількість вийнятих кульок. Сформувати ряд розподілу ДВВ, записати функцію розподілу. Побудувати багатокутник розподілу, графік *F(x)* . Знайти числові характеристики: *M(x), D(x), S(x), MO*. Знайти ймовірність того, що будуть вийняті дві, три або чотири кульки.

Рішення.

Можливі такі події:

P(X=1)= 4/9–ймовірність того, що з першого разу буде вийнята чорна кулька

P(X=2)= 5/9·4/8–ймовірність того, що з першого разу буде вийнята біла кулька, а другою чорна.

P(X=3)= 5/9·4/8··4/7–ймовірність того, що з першого і другого разів будуть вийняті білі кульки, а третя чорна.

P(X=4)= 5/9·4/8·3/7·4/6–ймовірність того, що з першого, другого, третього разів будуть вийняті білі кульки, а четверта чорна.

P(X=5)=5/9·4/8·3/7·2/6·4/5–ймовірність того, що з першого, другого, третього і четвертого разів будуть вийняті білі кульки, а п'ята чорна.

P(X=6)=5/9·4/8·3/7·2/6·1/5·4/4–ймовірність того, що з першого, другого, третього, четвертого та п'ятого разів будуть вийняті білі кульки, а шоста чорна

Змінна величина X може приймати значення від 1 до 6.

Побудуємо таблицю розподілу.

X	1	2	3	4	5	6
P	4/9	5/18	10/63	5/63	2/63	1/126

$$\sum_{i=1}^{6} ð_i = \frac{4}{9} + \frac{5}{18} + \frac{10}{63} + \frac{5}{63} + \frac{2}{63} + \frac{1}{126} = 1$$

Математічне очікування

$$Ì\left(õ\right)=\sum_{i=1}^{6}õ_i\cdot ð_i=\frac{4}{9}\cdot 1+\frac{5}{18}\cdot 2+\frac{10}{63}\cdot 3+\frac{5}{63}\cdot 4+\frac{2}{63}\cdot 5+\frac{1}{126}\cdot 6=2$$

Дісперсія

$$D\left(õ\right)=\sum_{i=1}^{6}õ^2{}_i\cdot ð_i-M^2(x)=\frac{4}{9}\cdot 1^2+\frac{5}{18}\cdot 2^2+\frac{10}{63}\cdot 3^2+\frac{5}{63}\cdot 4^2+\frac{2}{63}\cdot 5^2+\frac{1}{126}\cdot 6^2-4=\frac{4}{3}$$

$$\sigma(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ймовірність того, що будуть вийняти 2, 3 або 4 кульки дорівнює:

P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)= 5/18+10/63+5/63=65/126=0,516

Тема 8. Неперервні випадкові величини

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: функція щільності, функція розподілу, формули знаходження числових характеристик неперервної випадкової величини.

Випадкову величину називають неперервною, якщо множина її значень нелічильна. Значення неперервної випадкової величини зображаються на числовій осі як відрізки будь-якої довжини.

Щільністю розподілу називають першу похідну від функції розподілу. Звичайно щільність розподілу використовують для завдання неперервних випадкових величин.

Співвідношення, що зв'язують функцію щільності і функцію розподілу, мають наступний вигляд: $f\left(x\right)=F'\left(x\right)$ і $\int_{-\infty}^{x}f(\tau)d\tau=F\left(x\right)$.

Завдання 8.1: Неперервна випадкова величина задана функцією щільності розподілу ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases}a, x\in(0,3)\\0, x\notin(0,3)\end{cases}$$

Обчислити параметр a і функцію розподілу $F(x)$.

Рішення

Значення параметра a знайдемо за допомогою рівняння:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} adx + \int_{3}^{\infty} 0dx = 0 + ax\Big|_0^3 + 0 = 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3},$$

отже $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, x \in (0,3) \\ 0, x \notin (0,3) \end{cases}.$

Функція розподілу: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\tau)d\tau$.

На інтервалі $x \le 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

для $0 < x \le 3$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{3}dx = 0 + \frac{1}{3}x$;

для $x > 3$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{3}dx + \int_{3}^{x} 0dx = 0 + \frac{1}{3}x\Big|_0^3 + 0 = 1$;

таким чином, функція розподілу: $F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{1}{3}x, 0 < x \le 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}.$

<u>*Математичне очікування*</u> – це середнє (середнєзвиважене по ймовірності) значення випадкової величини, тобто: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

<u>*Дисперсія*</u> випадкової величини – це математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = M(\tilde{O}^2) - M(\tilde{O})^2.$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини – це квадратний корінь з дисперсії: $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$.

Модою Мо випадкової величини X називається її найбільш ймовірне значення.

Медіаною Ме випадкової величини X називається таке її значення, для якого $P(x < Me) = P(x > Me) = \frac{1}{2}$.

Завдання 8.2: Неперервна випадкова величина задана функцією щільності розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, x \in (0,3) \\ 0, x \notin (0,3) \end{cases}$$

Знайти числові характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $Me(X)$; $Mo(X)$.

Рішення.

Математичне очікування:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^3 x\frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}\int_0^3 xdx = \frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{9}{6} = 1{,}5$$

Дисперсія:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

$$M(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2\frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{27}{9} = 9$$

$$D(x) = 9 - 1{,}5^2 = 6{,}75$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{6{,}75} = 2{,}6$

Медіану можна знайти шляхом розв'язання рівняння.

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{Me} \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}x\Big|_0^{Me} = \frac{Me}{3} = \frac{1}{2}, \text{ звідси } Me = 1{,}5.$$

Мода (найбільш ймовірне значення НВВ) в цьому розподілі відсутня – це безмодальний розподіл.

***Завдання 8.3*:** Віпадкова величина *X* що задана інтегральною функцією розподілу.

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 2\\ \dfrac{x^3-8}{19} & ,2<x\le 3\\ 1 & ,x>3\end{cases}$$

Визначити: щільність розподілу ймовірностей, математичне очікування, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Знайті ймовірність того, що *X* прийме значення з інтервалу (2,5–3) .

<u>*Рішення*</u>.

Функція щільності $f(x)=F'(x)$ отже:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,\ x\le 2\\ \dfrac{3\tilde{o}^2}{19} & ,\ 2<x\le 3\\ 0 & ,\ x>3\end{cases}$$

Математічне очікування $M(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx$

$$M(x)=\int\limits_{-\infty}^{2}x\cdot 0\,dx+\int\limits_{2}^{3}x\cdot\left(\frac{3x^2}{19}\right)dx+\int\limits_{3}^{+\infty}x\cdot 0\,dx=\frac{3}{19}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_2^3=\frac{3}{76}\left(3^4-2^4\right)=\frac{3\cdot 65}{76}=2{,}566\,.$$

Діспeрсія $D(x)=M(x^2)-M^2(x)$

$$M(x^2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx$$

$$M(x^2)=\int\limits_{-\infty}^{2}x^2\cdot 0\,dx+\int\limits_{2}^{3}x^2\cdot\left(\frac{3x^2}{19}\right)dx+\int\limits_{3}^{+\infty}x^2\cdot 0\,dx=\frac{3}{19}\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_2^3=\frac{3}{95}\left(3^5-2^5\right)=\frac{3\cdot 211}{95}=6{,}663$$

$$D(x)=6{,}663-(2{,}566)^2=0{,}079$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{0{,}079}=0{,}2804$

Ймовірність того, що *X* прийме значення з інтервалу $(2{,}5;\,3)$ визначається за формулою: $P\{a\le x<b\}=F(b)-F(a)$ або $P\{a\le x<b\}=\int\limits_a^b f(x)dx$.

$$P\{2{,}5\le x<3\}=\int\limits_{2,5}^{3}f(x)dx=\int\limits_{2,5}^{3}\frac{3x^2}{19}dx=\frac{3}{19}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{2,5}^{3}=\frac{1}{19}\left(3^3-2{,}5^3\right)=\frac{11{,}375}{19}=0{,}599\,.$$

Тема 9. Віпадкові величини та їх економічна інтерпретація

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: дискретні закони (рівномірний, біноміальний, Пуассона, геометричний, гіпергеометричний), неперервні закони (рівномірний, експоненціальний, нормальний).

Велику кількість різних випадкових величин і відповідних ним законів розподілу можна розділити на дві великі групи: дискретні випадкові величини і неперервні випадкові величини.

Основні закони розподілу дискретних випадкових величин:

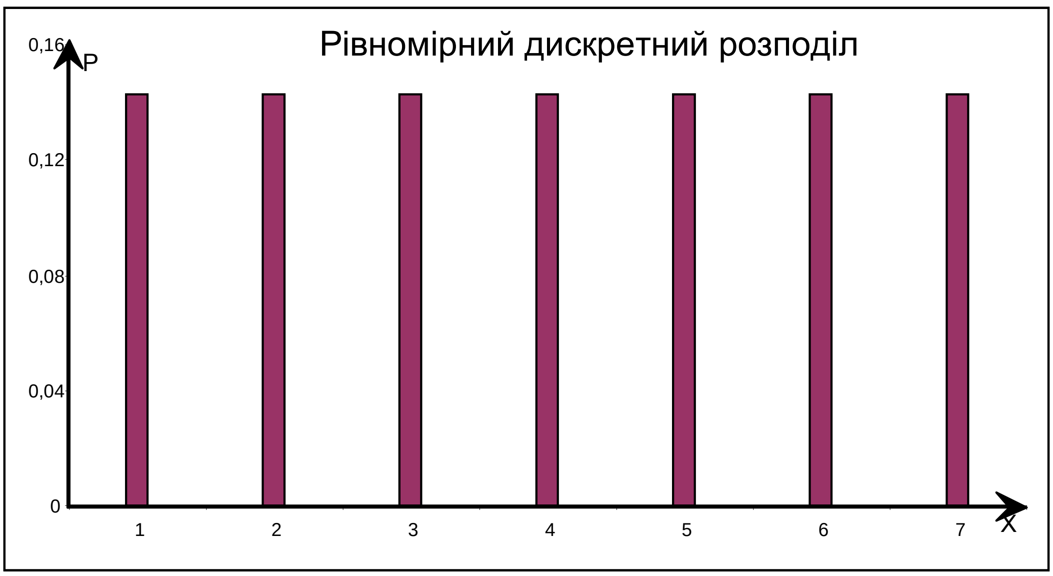
Рівномірний дискретний розподіл

Випадкова величина X має рівномірний дискретний розподіл, якщо вона приймає скінченне число різних значень з однаковою ймовірністю. Якщо X набуває значень $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …, $x_n = n$, то ймовірність всіх значень однакова і рівна $P(X = i) = \frac{1}{n}$ для всіх цілих значень ***i*** з інтервалу ***[1,n].***

$M(X) = \frac{n+1}{2}$ і $D(X) = \frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

<u>Завдання 9.1:</u> Є сім різних ключів, з яких лише один підходить до замку. Розглядається випадкова величина X – число проб при відкритті замку, якщо випробуваний ключ в подальших спробах відкрити замок не бере участь. Визначити математичне очікування і побудувати спектр розподілу.

<u>Рішення</u>.
Ймовірність того, що замок буде відкритий з першого разу, рівна 1/7, ймовірність того, що з другого – 6/7*1/6=1/7 і так далі, тобто це рівномірний дискретний розподіл, отже $M(X) = \frac{7+1}{2} = 4$.



Біноміальний розподіл

Випадкова величина X має біноміальний розподіл з параметрами n і p, $(0 < p < 1, n \geq 1)$ якщо

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k \in \overline{0,n}$$

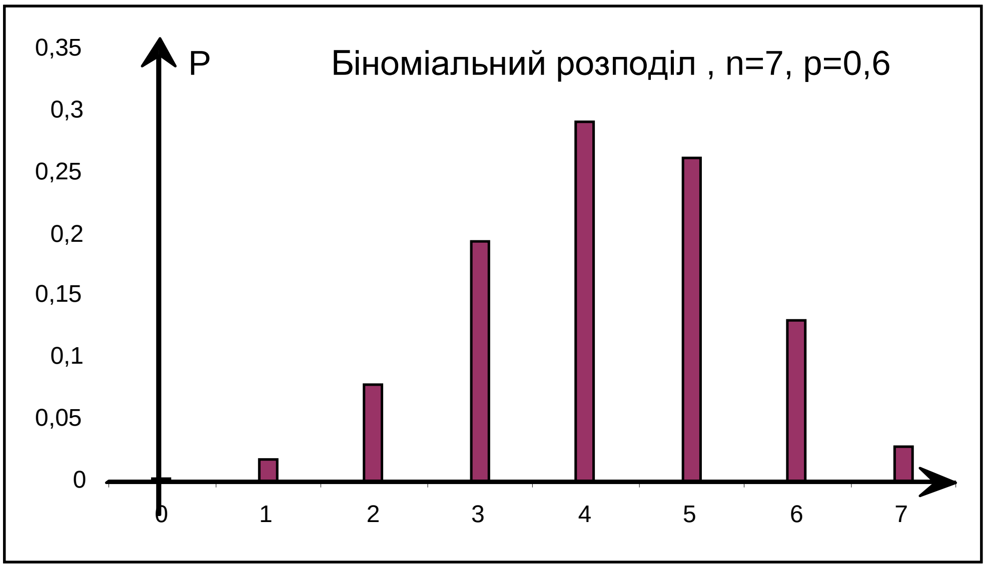
$$M(X) = np \text{ і } D(X) = np(1-p) = npq \ .$$

Завдання 9.2: Знаряддя робить сім пострілів по мішені. Ймовірність поразки мішені з одного пострілу складає 0,6. Визначити середню кількість поразок мішені.

Рішення.

Даний експеримент відноситься до біноміального експерименту, оскільки 1) кількість випробувань фіксована $n = 7$; 2) можливо лише два результати: «влучів», «не влучів»; 3) вважаємо, що поразка мішені при кожному пострілі не залежить від попереднього пострілу; 4) ймовірність попадання (промаху) є постійною для кожного пострілу $p = 0{,}6$ ($q = 0{,}4$)

Середня кількість поразок мішені – це математичне очікування, отже, 7*0,6=4,2 приблизно 4 рази з семи мішень буде вражена. Це підтверджує спектр розподілу



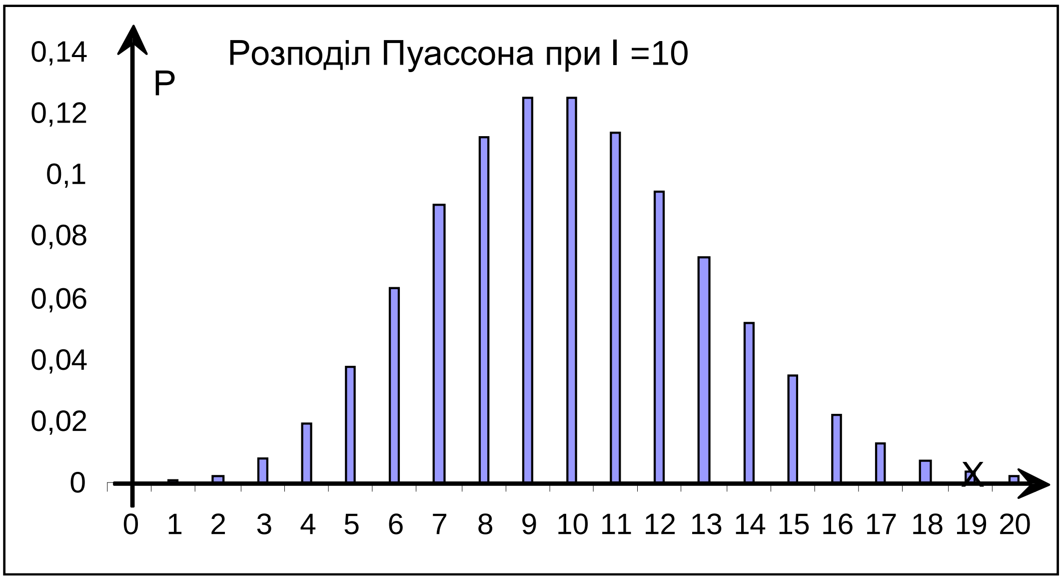
Розподіл Пуассона

Випадкова величина X має розподіл Пуассона з параметром $\lambda, (\lambda > 0)$, якщо

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ ....$$

$$M(X) = D(X) = \lambda .$$

Розподіл Пуассона є моделлю для описування випадкового числа появ певних подій у фіксований проміжок часу або у фіксованій області простору. Наприклад, так розподілені: кількість бактерій, видимих під мікроскопом; мутації, викликані радіацією; кількість зірок в певній області неба; кількість дерев на ділянці лісу і ін.



Завдання 9.3: Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу в дорозі дорівнює 0,002.

*а) з*найти середню кількість пошкоджених виробів;

б) знайти ймовірність того, що буде пошкоджено більше 3 виробів.

<u>*Рішення*</u>

а) застосуємо формулу Пуассона $P_n\left(X=k\right)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k=\overline{1,n}$ де параметр *L=n·p=M(x)* є математичне очікування, або середня кількість пошкоджених виробів. Таким чином маємо: *L=500·0,002=1*.

б) знайдемо ймовірність протилежної події, тобто, ймовірність того, що буде пошкоджено менше 3 виробів:

$$P_{500}(k<3)=P_{500}\left(X=0\right)+P_{500}\left(X=1\right)+P_{500}\left(X=2\right)=e^{-1}\frac{1^0}{0!}+e^{-1}\frac{1^1}{1!}+e^{-1}\frac{2^0}{2!}=\frac{5}{2}e^{-1}=0,9197$$

Тоді ймовірність ймовірність того, що буде пошкоджено більше 3 виробів дорівнює: $P_{500}(k>3)=1-P_{500}(k<3)$ *=1-0,9197=0,019.*

Геометричний розподіл

Випадкова величина X має геометричний розподіл з параметром p *(0≤p≤1),* якщо

$$P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots.$$

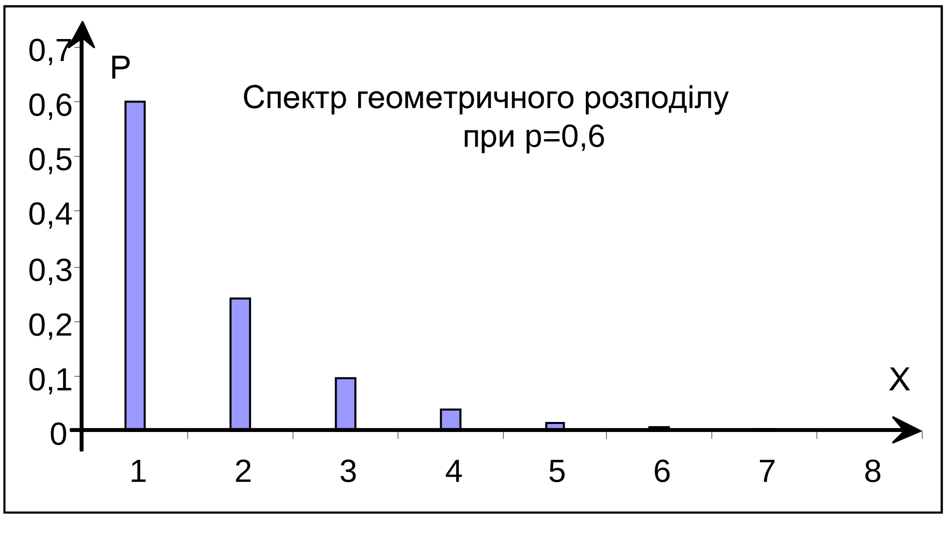
$$M(X)=\frac{(1-p)}{p}\ \text{і}\ D(X)=\frac{(1-p)}{p^2}.$$

Завдання 9.4: Знаряддя робить постріли по мішені до першого попадання. Ймовірність поразки мішені з одного пострілу складає 0,6. Визначити ймовірність того, що йому не доведеться стріляти більше трьох разів.

Рішення

Якщо стрілець влучив в мішень, постріли припиняються. Не більше трьох пострілів це один або два або три постріли. Один постріл означає постріл з попаданням; два постріли означають: перший – промах, а другий – попадання; три постріли означають: перший і другий – промахи, а третій – влучення.

$$P\left(X\le 3\right)=P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)+P\left(X=3\right)=0,6+0,4\cdot 0,6+0,4^2\cdot 0,6=0,936$$



Гіпергеометричний розподіл

Випадкова величина X має гіпергеометричний розподіл з параметрами N, n і M $\left(0 \le n \le N, 0 \le M \le N\right)$, якщо

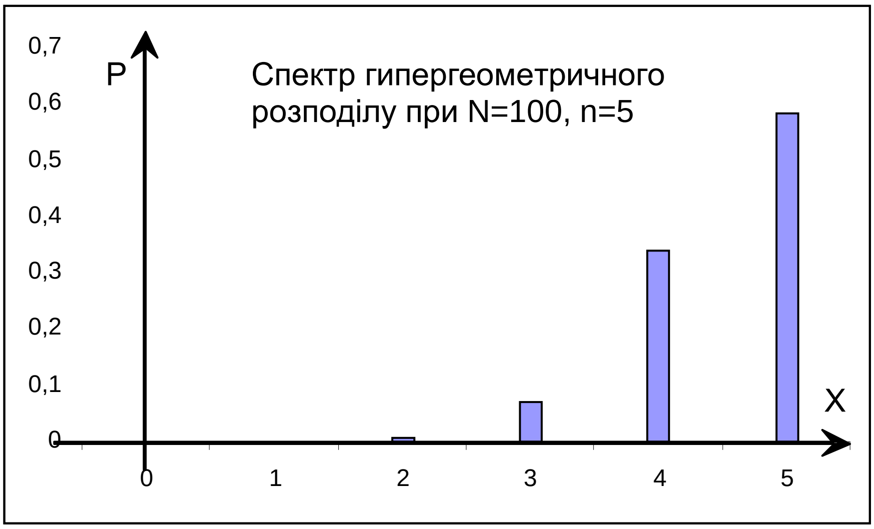
$$P\left(X = k\right) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ \text{n}.$$

$$M\left(X\right) = n\frac{M}{N},\ D\left(X\right) = n\frac{M(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}.$$

Завдання 9.5: У партії з 100 деталей 10 бракованих. Для аналізу якості деталей відбирають 5 штук. Знайти середню кількість стандартних деталей серед відібраних.

Рішення

N=100, n=5, p=90/100=0.9. Середнє означає математичне очікування, 5·0,9=4,5.



Основні закони розподілу неперервних випадкових величин:

Рівномірний неперервний розподіл

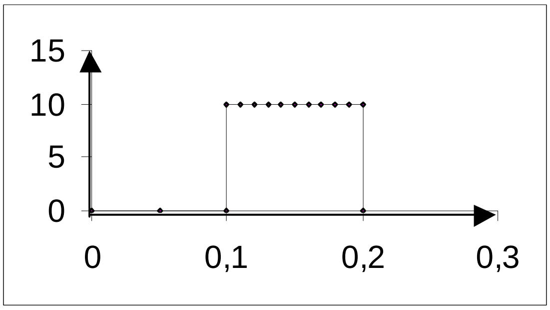
Випадкова величина X має *рівномірний розподіл* на інтервалі, якщо її щільність ймовірності визначається за формулою: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a \quad b] \\ 0, x \notin [a \quad b] \end{cases}$,

функція розподілу: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a \quad b], \\ 1, & x > b \end{cases}$ $M\left(X\right) = \dfrac{a+b}{2}$, $D\left(X\right) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Ймовірність попадання в інтервал $\left(\alpha, \beta\right)$ дорівнює $P\left(\alpha, \beta\right) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}$.

Завдання 9.6: Ціна ділення шкали амперметра дорівнює *0,1А*. Показаники приладу округлюють до найближчого цілого ділення. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена помилка, що перевищує 0,02А.

Рішення



Помилку округлення відліку можна розглядати як ВВ *X*, яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми цілими діленнями. За умовою завдання довжина інтервалу складає 0,1, отже $f(x)=\frac{1}{0,1}=10$.

Помилка відліку перевищить 0,02, якщо вона буде належить інтервалу *(0,02; 0,08)*. Тому

$$P(0,02<X<0,08)=\int_{0.02}^{0.08}10dx=10\cdot 0,08-10\cdot 0,02=0,6 \ .$$

Отже, ймовірність того, що помилка відліку перевищить 0,02 складає 0,6.

Показниковий (експоненціальний) розподіл

Випадкова величина *X* має *показниковий розподіл* з параметром $\lambda\ (\lambda>0)$, якщо її щільність ймовірності обчислюється за формулою $f(x)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$

а функція розподілу $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda\cdot x}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$ і $M(X)=\frac{1}{\lambda}$, $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$.

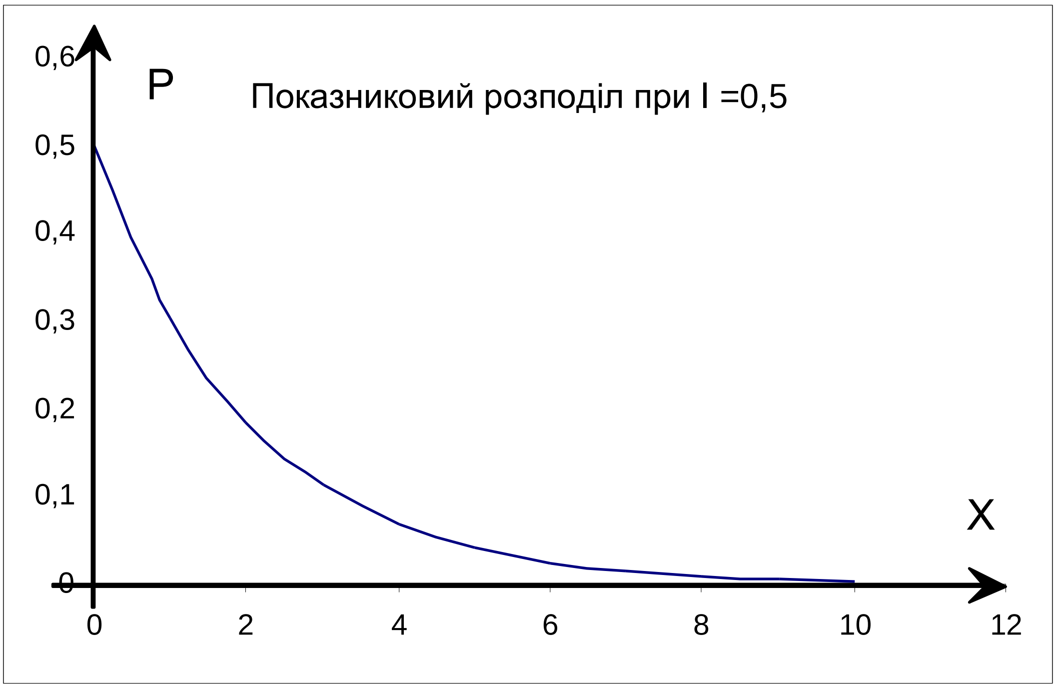
Цей розподіл часто зустрічається в моделюванні випадкових процесів, воно володіє так званою властивістю відсутності післядії.

Завдання 9.7: На шосе встановлений контрольний пункт для перевірки технічного стану автомобілів. Знайти математичне очікування і середнє квадратичне відхилення *ВВ*, *T* – час чекання контролера чергової машини, якщо потік машин найпростіший і час (у годинах) між проходженнями машин через контрольний пункт розподілений по показниковому закону $f(t)=5e^{-5t}$.

Рішення.

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}\ ,\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda},\ \ \lambda=5\,.\,M(X)=\frac{1}{5}\textit{часа}=12\textit{мин}\,.$$

Тривалість часу безвідмовної роботи також розподілена за показниковим законом.



Нехай елемент починає працювати у момент часу $t_0 = 0$, а у момент t відбувається відмова. Неперервна випадкова величина T – тривалість часу безвідмовної роботи елементу, а L– інтенсивність відмов (середнє число відмов в одиницю часу). Тоді $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}\ (\lambda > 0)$ визначає ймовірність відмови елементу за час тривалістю *t*.

Функція надійності $R(t) = e^{-\lambda t}$ *визначає ймовірність безвідмовної роботи елементу за час t.*

Завдання 9.8: Тривалість часу безвідмовної роботи елементу має показниковий розподіл $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-0,01t}\ (\lambda > 0)$. Знайти ймовірність того, що за час тривалістю $t = 50 ãî ä.$: а) елемент відмовить; б) елемент не відмовить.

Рішення.

а) $F(50) = P(T < 50) = 1 - e^{-0,01 \cdot 50} = 1 - e^{-0,5} = 1 - 0,606 = 0,394$;

б) $R(50) = e^{-0,01 \cdot 50} = 0,606$.

Нормальний розподіл

Випадкова величина X має нормальний розподіл з параметрами μ і σ^2, якщо її щільність ймовірності: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in (-\infty, \infty)$, а функція розподілу: $F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz$

$$M(X)=\mu \text{ і } D(X)=\sigma^2.$$

Нормальний розподіл називають також розподілом Гаусса або законом Гаусса. Якщо $\mu=0$ і $\sigma^2=1$, то розподіл називають *стандартним нормальним розподілом*. Лінійне перетворення $Y=(X-\mu)/\sigma$ приводить довільну нормально розподілену величину X до стандартного нормального розподілу.

- Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (α,β), дорівнює:

$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$, де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ – функція Лапласа.

- Ймовірність того, що *абсолютна величина відхилення менше додатного числа* δ, складає

$$P(|X-\mu|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

- *Правило трьох сигм:* нормально розподілена випадкова величина з великою ймовірністю набуває значень, близьких до свого математичного очікування

$$P(|X-\mu|>\sigma)=0.3173,$$

$$P(|X-\mu|>2\sigma)=0.0455,$$

$$P(|X-\mu|>3\sigma)=0.0027,$$

це означає, що 99% значень нормально розподіленої випадкової величини знаходяться на інтервалі $(-3\sigma,+3\sigma)$.

Фундаментальну роль, яку грає нормальний розподіл в теорії ймовірностей і математичній статистиці, пояснюється тим, що в більшості випадків розподіл суми випадкових величин із зростанням числа доданків асимптотично збігається до нормального розподілу. (центральна гранична теорема).

Завдання 9.9: Ріст студентів другого курсу економічного факультету розподілений за нормальномим законом з середнім 1,65 і середнім квадратичним відхиленням 0,05. *а)* Знайти ймовірність того, що ріст навмання вибраного студента складе не меншь 1,70; *б)* знайти інтервал, симетричний відносно математичного очікування, в який з ймовірністю 0,9973 попаде ріст випадково вибраного студента; *с)* побудувати схематичний графік функції щільності.

Рішення

а) $P(1{,}70 \le X < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{1{,}70 - 1{,}65}{0{,}05}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi(1) \ = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$

б) знайти інтервал, симетричний відносно математичного очікування, в який з ймовірністю 0,9973 попаде ріст випадково вибраного студента.

Тоб то треба визначити величчину δ . Застосуємо формулу розрахунку ймовірності відхілення та прирівняємо її до заданої ймовірності, розв'яжемо рівняння та знайдемо δ.

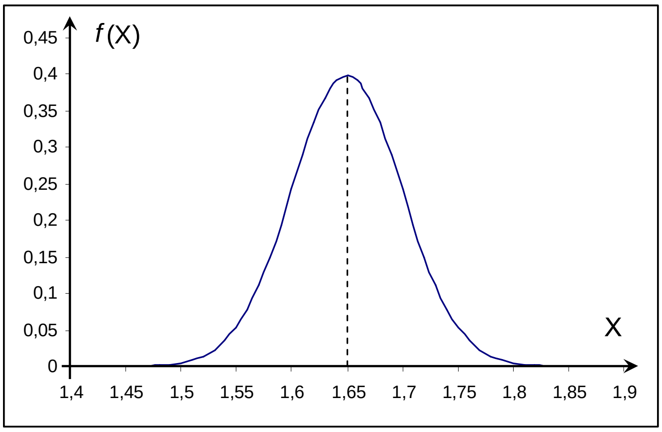
$$P(|X - \mu| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{0{,}05}\right) = 0{,}9973,$$

$$\Phi\left(\frac{\delta}{0{,}05}\right) = 0{,}44865, \text{ тоді за таблицею } \frac{\delta}{0{,}05} = 3{,}00, \ \delta = 0{,}15 \text{ м}.$$

отже, шуканий інтервал

$(1{,}65 - 0{,}15; \quad 1{,}65 + 0{,}15) = (1{,}50; \ \ 1{,}80)$.

використуємо ці дані для побудови графіка.
в) функція щільності розподілу



Завдання 9.10: Автомат виготовляє кульки. Кулька вважається придатною, якщо відхилення X діаметру кульки від проектного розміру за абсолютною величиною менше 0,8 мм. Вважаючі, що випадкова величина X розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0{,}3 \textit{мм}$, знайти, скільки буде придатних кульок серед 100 виготовлених.

Рішення.

Оскільки X – відхилення (діаметру кульки від розміру, що запректовано), тоді $M(x) = \mu = 0$.

Скористаємося формулою

$$P(|X-\mu|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{0{,}8}{0{,}3}\right)=2\Phi(2{,}66)=2\cdot 0{,}4961=0{,}9922.$$

Таким чином, ймовірність відхилення, меншь ниж 0,8 мм, дорівнює 0,99. Тоді приблизно 99 кульок з 100 виявляться придатними.

Завдання 9.11: Відомі математичне очікування $\mu=5.2$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma=0{,}81$ випадкової величини, яка розподілена за нормальним законом. Знайті ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу $(\alpha;\ \beta)$. $\alpha=4$, $\beta=7$,

Рішення

Віпадкової величини розподілена за нормальним законом, тому

$$P(\alpha\le x\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

$$P(4\le x\le 7)=\Phi\left(\frac{7-5{,}2}{0{,}81}\right)-\Phi\left(\frac{4-5{,}2}{0{,}81}\right)=\Phi(2{,}22)-\Phi(-1{,}48)$$

$\Phi(x)$ – непарна функція.

З таблиці знаходимо:

$\Phi(2{,}22)=0{,}4868$

$\Phi(-1{,}48)=-\Phi(1{,}48)=-0{,}4306$

$P(4\le x\le 7)=\Phi(2{,}22)-\Phi(-1{,}48)=0{,}4868+0{,}4306=0{,}9174$.

Тема 10. Вібірковій метод в математичній статистиці

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: статистичний розподіл вибірки, емпірична функція розподілу, полігон і гістограма.

Нехай з генеральної сукупності довільним чином вибрані варіанти x_i, причому варіанта x_1 спостерігалася m_1 разів, x_2 – m_2 разів ., x_k – m_K разів.

$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ – об'єм вибірки.

Послідовність варіант, записаних в зростаючому порядку, називається *варіаційним рядом*.

Числа спостережень m_i кожної варіанти називаються *частотами*. Відношення $\frac{m_i}{n} = P_i^*$ називаються *відносними частотами* або *емпіричною ймовірністю*.

Варіційний ряд

Варіанти	**Частоти**	**Відносні частоти** P_i *	$F^*(x)$
x_1	m_1	$p_1 = \frac{m_1}{N}$	p_1
x_2	m_2	$p_2 = \frac{m_2}{N}$	$p_1 + p_2$
…	…	...	...
x_k	m_k	$p_k = \frac{m_k}{n}$	$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$
Об'єм виборки	$n = \sum_{i=1}^{k} m_i$	$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$	–

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант (у зростаючому порядку) і відповідних ним частот (відносних частот). Статистичний розподіл можна задати також у вигляді *послідовності інтервалів* і відповідних ним *частот* (сума частот, що попали в інтервал) – *варіаційний ряд по інтервалах*.

Варіаційний ряд по інтервалах значень генеральної сукупності доцільно скласти, якщо кількість варіант k дуже велике або близьке до об'єму вибірки, або ряд складають з вибірки неперервної генеральної сукупності.

В теорії ймовірностей під розподілом розуміють відповідність між можливими значеннями випадкової величини і її ймовірністю, а в математичній статистиці – відповідність між спостережуваними варіантами і їх частотами, або відносними частотами.

Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки) називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$. $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де $n_x = \sum_{i=1}^{x} n_i$ – число варіант, менших x, n – об'єм вибірки.

У відмінності від емпіричної функції розподілу вибірки, інтегральну функцію розподілу генеральної сукупності називають теоретичною функцією розподілу. Відмінність між емпіричною і теоретичною функціями полягає в тому, що теоретична функція $F(x)$ визначає ймовірність події $X < x$, а емпірична функція $F^*(x)$ визначає відносну частоту цієї ж події. $F^*(x)$ є оцінкою ординати інтегральної функції теоретичного розподілу.

Приклад. Заданий розподіл частот вибірки об'єму 20:

Скласти розподіл відносних частот, записати емпіричну функцію розподілу.

x_i	*2*	*6*	*12*
m_i	*3*	*10*	*7*

В цілях наочності будують різні графіки статистичного розподілу, зокрема полігон і гістограму.

Полігоном частот називають ламану, яка з'єднує крапки з координатами (x_1, m_1), (x_2, m_2), …, (x_k, m_k).

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують крапки з координатами (x_1, p_1^*), (x_2, p_2^*), …, (x_k, p_k^*).

Варіанти	**Частоти**	**Відносна частота P_i ***	$F^*(x)$
2	3	0.15	0.15
6	10	0.50	0.65
12	7	0.35	1
Объем выборки	$n = 20$	$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$	–

В разі неперервної ознаки доцільно будувати гістограму, для чого інтервал, в якому поміщені спостережувані значення ознаки, розбивають на декілька часткових інтервалів завдовжки l і знаходять для кожного інтервалу m_i – кількість варіант (частоти), що попали в *i*-й інтервал.

Кількість інтервалів *k* вибирають у відповідність з таблицею:

n	100	200	400	600	800	1000	1500	2000
k	12	16	20	24	27	30	35	37

або розраховують таким чином:

- визначають оптимальну довжину інтервалу за формулою $l = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.21 \times \lg n}$

- потім визначають $k=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{l}$, а кількість інтервалів дорівнює *k*, якщо *k* –ціле, якщо ні, то його округлюють у більшу сторону до найближчого цілого.

Варіаційний ряд по інтервалах частіше зображують у вигляді гістограми частот.

Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких служать часткові інтервали довжиною l, а висоти дорівнюють відношенню $h=\frac{m_i}{l}$ (щільність частоти). Площа гістограми частот дорівнює сумі частот, тобто об'єму вибірки.

Гістограмою відносних частот, називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких служать часткові інтервали довжиною l, а висоти дорівнюють відношенню $h=\frac{p_i^*}{l}$ (щільність відносної частоти). Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

Побудова варіаційного ряду по інтервалах виконується в наступній послідовності:

- визначають кількість інтервалів *k*;
- знаходять мінімальне значення досліджуваної ознаки (варіанти) у вибірці x_{min} ;
- знаходять максимальне значення досліджуваної ознаки (варіанти) у вибірці x_{max} ;
- обчислюють довжину інтервалу $l=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{k}$;
- визначають початок і кінець кожного інтервалу і формують таблицю

№ інтерв	Початок x_i	Кінець x_{i+1}	Частота m_i	Емпір. ймов. p_i^*	Висота h_i
1	x_{min}	$x_{min}+l$	m_1	m_1/n	p_1^*/l
2	$x_{min}+l$	$x_{min}+2l$	m_2	m_2/n	p_2^*/l
.	.	.	.	.	.
i	$x_{min}+(i-1)\cdot l$	$x_{min}+i\cdot l$	m_i	m_i/n	p_i^*/l
.	.	.	.	.	.
K	$x_{min}+(K-1)\cdot l$	x_{max}	m_K	m_k/n	p_K^*/l
Перевірка			$\sum m_i=n$	1	

- частота m_i визначається як кількість варіант, що попали в i-й інтервал. *Зауваження:* якщо варіанта потрапляє на границю між інтервалами, її слід враховувати лише один раз у *(i+1)-му* інтервалі;
- Емпіричну ймовірність знаходять як відношення частоти до кількості елементів вибірки $p_i^* = {m_i}/{n}$;
- Для графічного зіставлення теоретичної функції щільності з емпіричною ймовірністю, останню визначають висотою $h_i = p_i^* / l$ прямокутника гістограми, оскільки p_i^* показує ймовірність попадання варіанти в i-й інтервал.

Продемонструємо сказане на прикладі.
Дана вибірка.

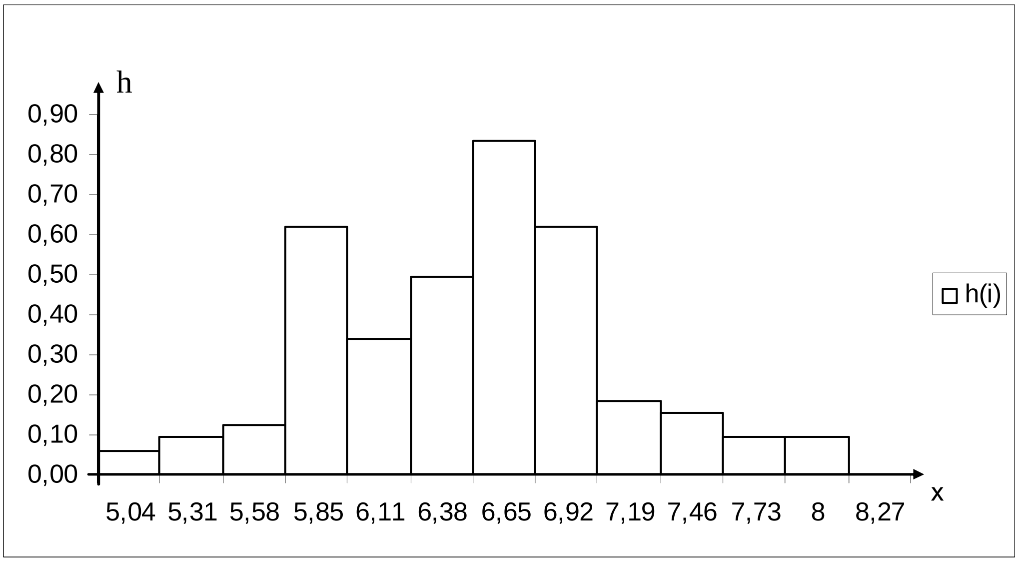
6,46	6	5,95	4	6,44	6	6,21	5	5,29	1	5,53	2	6,96	8	7,06	8
6,80	7	5,87	4	6,41	6	6,30	5	5,67	3	6,81	7	6,43	6	7,13	8
6,82	7	5,90	4	6,21	5	7,63	10	6,56	6	7,05	8	7,40	9	7,60	10
6,96	8	6,46	6	6,48	6	6,78	7	7,10	8	7,34	9	6,66	7	6,93	8
5,77	3	8,26	12	7,24	9	6,93	8	6,65	6	6,86	7	6,96	7	6,73	7
7,31	9	6,54	6	6,00	4	6,89	7	6,02	4	6,86	7	7,75	11	7,04	8
6,63	6	6,15	5	6,96	8	6,90	7	7,97	11	6,89	7	**5,04**	1	6,34	5
5,86	4	7,02	8	6,01	4	7,12	8	6,83	7	6,98	8	6,52	6	6,82	7
6,60	6	5,72	3	6,68	7	6,24	5	6,79	7	6,75	7	6,29	5	6,95	8
6,48	6	6,86	7	6,67	7	6,77	7	7,14	8	6,38	5	5,93	4	6,88	7
6,86	7	6,23	5	7,55	10	6,17	5	6,01	4	7,49	10	7,24	9	6,07	4
6,04	4	5,86	4	6,05	4	7,02	8	6,08	4	5,46	2	7,17	8	6,51	6
5,97	4	6,18	5	5,93	4	8,05	12	**8,27**	12	6,74	7	6,06	4	7,34	9
5,95	4	6,50	6	6,40	6	7,08	8	7,01	8	5,97	4	5,69	3	5,34	2
7,63	10	6,74	7	6,72	7	6,88	7	6,06	4	7,83	11	6,70	7	6,92	8

Мін.знач.	Макс.знач.	Довж. інтерв.
5,04	8,27	0,27

№	Початок x_i	Кінець x_{i+1}	Частота m_i	Емпір. ймов. p_i^*	Висота h_i
1	5,04	5,31	2	0,0167	0,06
2	5,31	5,58	3	0,025	0,09
3	5,58	5,85	4	0,0333	0,12
4	5,85	6,11	20	0,1667	0,62
5	6,11	6,38	11	0,0917	0,34
6	6,38	6,65	16	0,1333	0,49
7	6,65	6,92	27	0,225	0,83
8	6,92	7,19	20	0,1667	0,62
9	7,19	7,46	6	0,05	0,19
10	7,46	7,73	5	0,0417	0,15
11	7,73	8,00	3	0,025	0,09
12	8	8,27	3	0,025	0,09
Перевірка			120	1	

1. Побудова гістограми варіаційного ряду

По осі абсцис відкладають значення всіх інтервалів, на осі ординат для кожного інтервалу відкладають «висоту», утворюючи прямокутники.



Тема 11. Статістічні оцінки параметрів розподілу

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: точкова і інтервальна оцінка, певний інтервал, надійність оцінки.

Генеральна сукупність характеризується деякими постійними числовими характеристиками розподілу. По вибірках можна знайти оцінки цих характеристик, наприклад математичне очікування, дисперсію і ін.

Статистичні оцінки бувають точковими (якщо параметр визначають крапкою на числовій осі, наприклад, математичне очікування дорівнює 36) і інтервальними (коли визначають **певний** інтервал, в який потрапляє оцінюваний параметр з великою достовірністю (0,95; 0,98; 0,99), наприклад, математичне очікування знаходиться в інтервалі $\left(\bar{x}-0{,}98; \bar{x}+0{,}98\right)$ з надійністю $\gamma = 0{,}95$).

Точкові оцінки

Внаслідок випадковості вибірок значення оцінок однієї числової характеристики θ, обчислені для різних виборок з однієї і тієї ж генеральної сукупності, бувають, як правило, різними, тому оцінка невідомого параметра T_n – це функція від вибірки. До точкових оцінок ставляться наступні вимоги:

- Оцінка має бути *незміщеною*, тобто не мати систематичної погрішності. ***Незміщеною*** називається оцінка T_n , середнє значення якої дорівнює оцінюваному параметру $M(T_n) = \theta$. Відповідно, *зміщеною* називають таку оцінку, математичне очікування якої не дорівнює оцінюваному параметру;
- Оцінка має бути *ефективною*. ***Ефективною*** називають статистичну оцінку, яка (при заданому об'ємі вибірки n) має найменшу можливу дисперсію;
- При розгляді вибірок великого об'єму (n велике!) до статистичних оцінок ставиться вимога *спроможності*. ***Спроможною*** називають статистичну оцінку, яка при $n \to \infty$ збігається по ймовірності до оцінюваного параметра. Наприклад, якщо дисперсія незміщеної оцінки при $n \to \infty$ збігається до нуля, то така оцінка виявляється і спроможною.

Способи оцінки невідомого параметра можуть бути різними. Наприклад, якщо відомо, що генеральна сукупність розподілена за нормальним законом, то математичне очікування можна оцінити як:

- *Перший елемент вибірки x_1 (наприклад, вимірюють деяку величину лише один раз, і цей результат використовують як оцінку математичного очікування);*
- *Середнє арифметичне максимального і мінімального елементів вибірки;*
- *Мода, оскільки при нормальному розподілі мода і математичне очікування співпадають;*
- *Медіана;*
- *Середнє арифметичне вибірки* $\bar{x}_в = \dfrac{\sum x_i}{n}$.

Генеральною середньою $\overline{x}_{\Gamma}$ називають середнє арифметичне значень ознаки генеральної сукупності. Якщо всі значення $x_1, x_2 ., x_N$ ознаки генеральної сукупності об'єму N різні, то $\overline{x}_{\Gamma} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$. Якщо ж значення ознаки x_1, x_2 ., x_k мають відповідні частоти N_1, N_2 ., N_k, причому $N_1 + N_2 + ... + N_k = N$, то $\overline{x}_{\Gamma} = \dfrac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + ... + x_k N_k}{N}$, тобто генеральна середня є середня зважена значень ознаки з вагами, рівними відповідним частотам.

Вибірковою середньою $\overline{x}_{в}$ називають середнє арифметичне значень ознаки вибіркової сукупності. Якщо всі значення x_1, x_2 ., x_n ознаки вибіркової сукупності об'єму n *різні*, то $\overline{x}_{в} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$. Якщо ж значення ознаки x_1, x_2 ., x_k мають відповідні частоти m_1, m_2 ., m_k, причому $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$, то $\overline{x}_{в} = \dfrac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_k m_k}{n}$. ***Вибіркова середня є незміщеною оцінкою генерального середнього.***

Генеральною дисперсією D_{Γ} називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності від їх середнього значення $\overline{x}_{\Gamma}$.

Вибірковою дисперсією $D_{в}$ називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки вибіркової сукупності від їх середнього значення $\overline{x}_{в}$.

Знайти вибіркову дисперсію можна за формулою: $D_{в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_{в}\right)^2}{n}$.

Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії, оскільки занижує значення генеральної дисперсії, особливо при незначному n

$$M\left(D_{в}\right) = \frac{n-1}{n} D_{\Gamma}.$$

«Виправлена дисперсія» матиме вигляд $D_{\Gamma} = \overline{S}^2 = \dfrac{n}{n-1} D_{в}$.

Природньо, що генеральне середнє квадратичне відхилення (стандарт) обчислюється за формулою: $\overline{S} = \sqrt{D_{\Gamma}}$.

Точкова оцінка генеральної середньої і генеральної дисперсії

Математичне очікування і дисперсія (або середнє квадратичне відхилення), як правило, є основними параметрами розподілу і дозволяють отримати уявлення про закон розподілу генеральної сукупності.

Точкові оцінки бувають незміщеними, ефективними і спроможними.

Генеральну середню можна оцінити по вибірковій середній, оскільки вибіркова середня володіє властивістю стійкості. Вибіркова середня є незміщеною і спроможною оцінкою генеральної середньої і визначається за формулою $\overline{x}_в = \frac{\sum x_i}{n}$ або $\overline{x}_в = \frac{\sum m_i \tilde{x}_i}{n}$, якщо $\tilde{x}_i$ – середина інтервалу.

Оскільки в даному прикладі досліджувана ознака набуває багато (практично більше 100) значень і кожне значення зустрічається раз або два, для розрахунку вибіркової середньої доцільно використовувати формулу

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{k=1}^{120} x_k}{120} = 6{,}63 \ .$$

Для того, щоб охарактеризувати розсіяння значень кількісної ознаки генеральної сукупності довкола свого середнього значення, необхідно обчислити *генеральну дисперсію*. Оскільки вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії, вибіркову дисперсію «виправляють» $D_Г = S^2 = \frac{n}{n-1} D_в$. Для розрахунку вибіркової дисперсії застосовують формулу

$D_в = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}_в^2$ Таким чином, для нашого прикладу

$$D_в = \frac{\sum_{k=1}^{120} x_i^2}{120} - \overline{x}_в^2 = \ = 44{,}38 - 6{,}63^2 = 0{,}38 \, , \ D_Г = S^2 = \frac{120}{119} 0{,}38 = 0{,}386 .$$

Тема 12. Статістічна перевірка статистичних гіпотез

При підготовці до заняття повторіть наступні поняття: типи статистичних гіпотез, типи критеріїв, критерії згоди.

Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу або про параметри відомого розподілу. Наприклад

- генеральна сукупність розподілена за нормальним законом розподілу;
- математичне очікування нормально розподіленої генеральної сукупності дорівнює 10;
- дисперсії двух нормальних сукупностей дорівнюють одна одній.

Як правило, висувається дві гіпотези H_0 – основна гіпотеза, наприклад, генеральна сукупність розподілена за рівномірним законом розподілу, і H_1 – конкуруюча (альтернативна) гіпотеза, наприклад, генеральна сукупність не розподілена за рівномірним законом розподілу.

Гіпотези бувають простими ($\lambda = 5$) або складними ($\lambda > 5$).

Висунута гіпотеза може бути правильною або неправильною, тому можуть виникнути помилки двох видів.

Помилка першого роду – знехтувана правильна гіпотеза.

Помилка другого роду – прийнята неправильна гіпотеза.

Наслідки помилок можуть бути різними. Наприклад, якщо знехтувано правильне рішення «продовжувати будівництво житлового будинку», то ця помилка першого роду спричинить матеріальний збиток; якщо ж прийняли неправильне рішення «продовжувати будівництво», то ця помилка другого роду може спричинити загибель людей.

Перевірка статистичних гіпотез

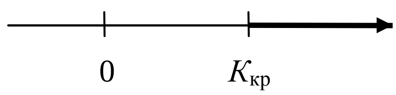
Статистичні гіпотези перевіряються за допомогою статистичних критеріїв. Для перевірки основної гіпотези використовують спеціально підібрану випадкову величину *К* (статистику), точне або наближене значення якої відоме. Критерієм згоди називають критерій перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу. Є декілька критеріїв згоди: χ^2 («кхі квадрат») Пірсону, Колмогорова, Смірнова.

Після вибору певного критерію, безліч всіх його можливих значень розбивають на дві підмножини, що не перетинаються: одна з них містить значення критерію, при яких основна гіпотеза відкидається (*критична область*), а інша – при якому вона приймається (*область прийняття гіпотези*).

<u>*Основний принцип перевірки статистичних гіпотез:*</u> якщо $K_{набл}$ належить до критичної області – основну гіпотезу відкидають, інакше основну гіпотезу приймають.

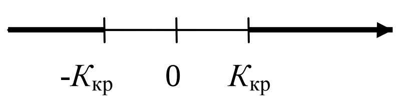
$K_{кр}$ – крапка, що відділяє критичну область від області прийняття гіпотези.

Розрізняють *однобічну* (правобічну, лівобічну) і *двосторонню* критичні області.



Правоьічна критична область

Левобічна критична область



Двостороння критична область

Для правосторонньої критичної області значення $K_{кр}$ шукають виходячи з вимоги, аби за умови справедливості H_0, ймовірність того, що критерій $K_{набл}$ набуде значення більшого $K_{кр}$, дорівнювала рівню значущості α .

Критерій згоди Пірсону

Перевагою критерію Пірсону є його універсальність: цей критерій застосовується однаково при різних розподілах. <u>*Ідея критерію Пірсону*</u> полягає в наступному: спостережувані (емпіричні m_i) частоти порівнюються з теоретичними n'_i (обчисленими в припущенні про закон розподілу, що перевіряється). Зазвичай емпіричні і теоретичні частоти розрізняються. Можливо, що розбіжність частот випадкова (незначуща) і пояснюється малим числом спостережень, або способом їх угрупування, або іншими причинами. Можливо, розбіжність частот невипадкова (значуща) і пояснюється тим, що теоретичні частоти обчислені виходячи з невірної гіпотези. Критерій Пірсону встановлює, на прийнятому рівні значущості α (де α – рівень значущості (досить мала ймовірність) позначає ймовірність помилки першого роду), узгоджуються або не узгоджуються гіпотези з даними спостережень.

Критерій Пірсону має правосторонню критичну область. Ймовірність попадання критерію χ^2 в критичну область, в припущенні справедливості нульової гіпотези, дорівнює прийнятому рівню значущості :

$$P\left[\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k)\right] = \alpha .$$

Таким чином, правостороння критична область визначається нерівністю $\chi^2 > \chi^2_{кр}(\alpha, k)$, а область прийняття нульової гіпотези – нерівністю $\chi^2 < \chi^2_{кр}(\alpha, k)$.

Правило. Для того, щоб при заданому рівні значущості, перевірити нульову гіпотезу H_0 : *генеральна сукупність розподілена згідно із законом А*, треба спочатку обчислити теоретичні частоти, а потім спостережуване значення критерію $\chi^2_{набл} = \sum \frac{(m_i - n'_i)^2}{n'_i}$ і по таблиці розподілу критичних точок розподілу χ^2 , по заданому рівню значущості α , і числу мір свободи k ($k = s - 1 - r$), (де s – число груп (часткових інтервалів вибірки), r – число параметрів передбачуваного розподілу), знайти критичну точку $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$. Якщо $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ – немає підстав відкинути нульову гіпотезу. Якщо $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ – нульову гіпотезу відкидають.

Зауваження 1. Об'єм вибірки має бути досить великий, не менше 50. Кожна група повинна містити не менше 5-8 варіант, нечисленні групи слід об'єднати в одну, підсумовуючи частоти.

Зауваження 2. Оскільки можливі помилки першого і другого роду, особливо, якщо узгодження теоретичних і емпіричних частот «дуже добре», слід проявляти обережність. Наприклад, можна повторити досвід, збільшити число спостережень, скористатися іншими критеріями, побудувати графік розподілу, обчислити асиметрію і ексцес.

Зауваження 3. В цілях контролю обчислень, спостережуване значення критерію обчислюють за формулою: $\chi^2_{набл} = \sum \frac{m_i^2}{n_i^T} - n$.

Доведено, що при $n \to \infty$ закон розподілу випадкової величини $\chi^2 = \sum \frac{\left(m_i - n_i^T\right)^2}{n_i^T}$, незалежно від того, якому закону розподілу підпорядкована генеральна сукупність, прагне до закону розподілу $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ з $k=n$ мірами свободи, де X_i – нормальні незалежні випадкові величини, причому математичне очікування кожною з них дорівнює нулю, а середнє квадратичне відхилення – одиниці. Диференціальна функція розподілу χ^2 має наступний вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k}{2}-1}, & x > 0 \end{cases}, \text{ де } \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \text{ – гамма-функція,}$$

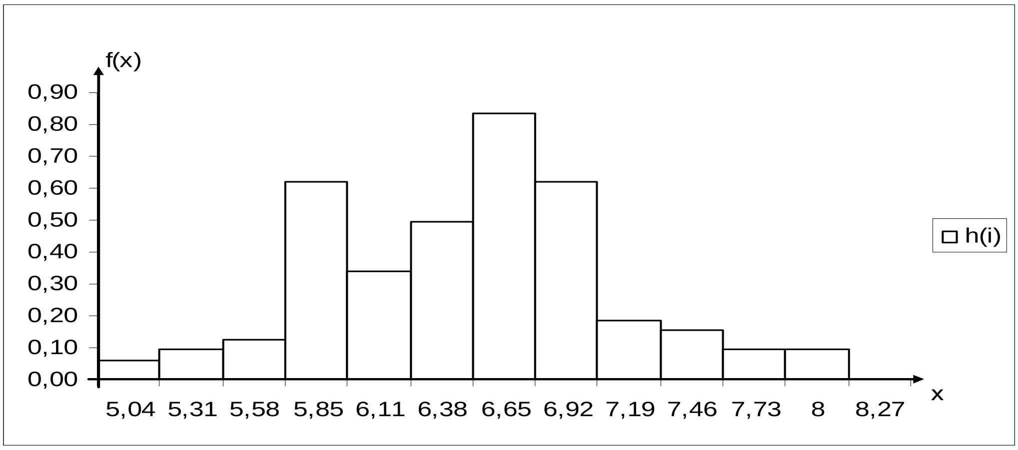
$$\Gamma(n+1)=n!$$

Із збільшенням числа мір свободи розподіл χ^2 повільно наближається до нормального.

2. Висунення гіпотези відносно закону розподілу генеральної сукупності

Статистичною гіпотезою називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу або про параметри відомого розподілу. Зазвичай, висувається дві гіпотези H_0 – основна гіпотеза, наприклад, генеральна сукупність розподілена за рівномірним законом розподілу, і H_1 – конкуруюча (альтернативна) гіпотеза, наприклад, генеральна сукупність не розподілена за рівномірним законом розподілу.

Висуватимемо гіпотезу відносно закону розподілу генеральної сукупності на підставі побудованої гістограми. Наприклад, якщо в перших і останніх інтервалах емпіричні частоти незначні, а в середніх – великі, то висунемо гіпотезу про нормальний розподіл.

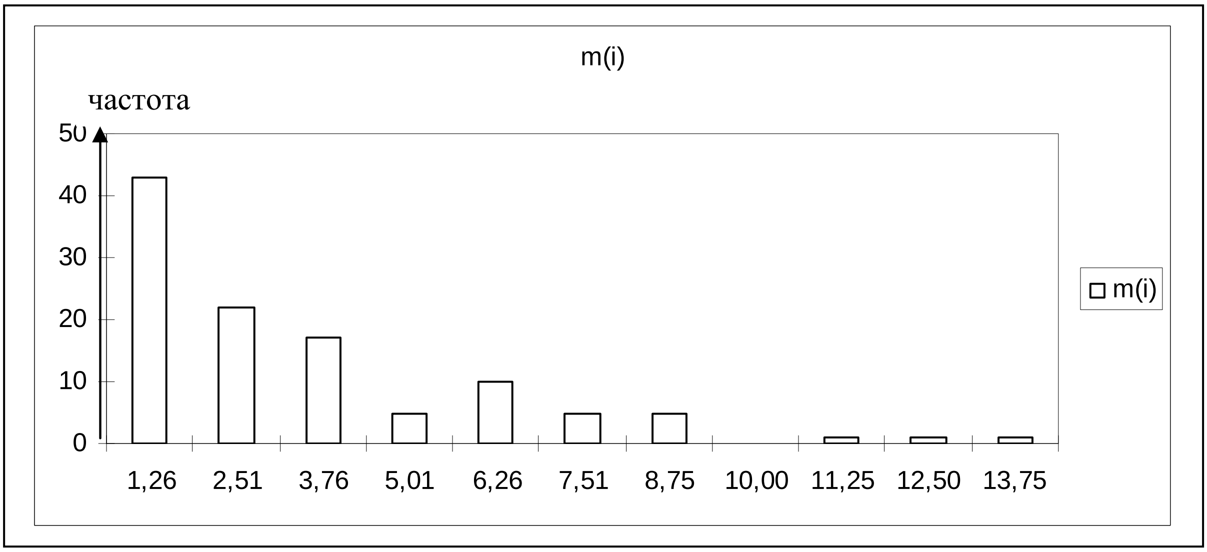


Тут ми бачимо, що значення кількісної ознаки *X* в основному зосереджені посередині діапазону і досить рідко зустрічаються на його кінцях, означає доцільно висунути такі гіпотези:

Основна гіпотеза H_0 – генеральна сукупність розподілена за нормальним закону розподілу;

Конкуруюча гіпотеза H_1 – генеральна сукупність не розподілена за нормальним закону розподілу.

Якщо в перших інтервалах емпіричні частоти великі, далі менші і в кінці практично нульові, то доцільно видвинути гіпотезу про показовий розподіл.



Оскільки значення кількісної ознаки *X* в основному зосереджені на початку діапазону і практично відсутні в його кінці, доцільно висунути такі гіпотези:

Основна гіпотеза H_0 *– генеральна сукупність розподілена за показовим законом розподілу;*

Конкуруюча гіпотеза H_1 *– генеральна сукупність не розподілена за показниковим законом розподілу*.

Якщо емпіричні частоти спочатку, в середині і в кінці приблизно одного порядку, то це – рівномірний розподіл.

Оскільки значення кількісної ознаки *X* ніде не зосереджені (розподілені по інтервалу рівномірно), доцільно висунути такі гіпотези:
Основна гіпотеза H_0 – генеральна сукупність розподілена за *рівномірним* законом розподілу*;*
Конкуруюча гіпотеза H_1 – генеральна сукупність не розподілена за *рівномірним* законом розподілу.

3. Визначення теоретичних (вирівнюючих) частот

Для того, щоб перевірити гіпотезу по критерію Пірсону, необхідно знайти вирівнюючі або теоретичні n' частоти. Залежно від передбачуваного закону розподілу теоретичні частоти знаходяться порізному.

а. <u>Рівномірний розподіл</u>

Заповнюється ще одна таблиця. Перші чотири стовпці ідентичні попередній таблиці;

Функцію щільності знаходять за формулою $f(x)=\frac{1}{b^*-a^*}$, де a^* і b^* – оцінки кінців інтервалу, визначувані за формулами*:*

$$a^*=\overline{x}_в-\sigma_в\sqrt{3} \text{ і } b^*=\overline{x}_в+\sigma_в\sqrt{3}$$

Теоретичні частоти n' знаходять за наступними формулами*:*

$$n'_1=n\cdot f(x)\cdot(x_2-a^*);$$
$$n'_2=n'_3=\ldots=n'_{K-1}=n\cdot f(x)\cdot(x_{i+1}-x_i);$$
$$n'_K=n\cdot f(x)\cdot(b^*-x_K).$$

і – й доданок критерію знаходять за формулою $\frac{(m_i-n'_i)^2}{n'_i}$.

Спостережуване значення критерію Пірсону розраховують за формулою:

$$\chi^2_{набл}=\sum_{i=1}^{K}\frac{(m_i-n'_i)^2}{n'_i}$$

№ інтерв	Початок x_i	Кінець x_{i+1}	Частота m_i	Плотність $f(x)$	Теоретич. частоти n'	Спостер. знач. критерію
1	$x_{\min}$	x_2	m_1	$\frac{1}{b^*-a^*}$	$n \cdot f(x) \cdot (x_2 - a^*)$	$\frac{(m_1 - n'_1)^2}{n'_1}$
2	x_2	x_3	m_2	$\frac{1}{b^*-a^*}$	$n \cdot f(x) \cdot l$	$\frac{(m_2 - n'_2)^2}{n'_2}$
…		.	.			
i	x_i	x_{i+1}	m_i	$\frac{1}{b^*-a^*}$	$n \cdot f(x) \cdot l$	$\frac{(m_i - n'_i)^2}{n'_i}$
.		.	.			
K	x_K	x_{max}	m_K	$\frac{1}{b^*-a^*}$	$n \cdot f(x) \cdot (b^* - x_K)$	$\frac{(m_K - n'_K)^2}{n'_K}$
Перевірка			$\sum m_i = n$			$\chi^2_{набл}$

Наприклад

№ ін-лу	Початок x_i	Кінець x_{i+1}	Частота m_i	Ф-я щільн. $f(x)$	Теоретичні частоти n'	Спостер. знач. критерію
1	9.71	14.98	13	0.02	10	0.762
2	14.98	20.25	10	0.02	10	0.005
3	20.25	25.53	6	0.02	10	1.463
4	25.53	30.80	6	0.02	10	1.463
5	30.80	36.07	13	0.02	10	1.058
6	36.07	41.35	6	0.02	10	1.463
7	41.35	46.62	14	0.02	10	1.818
8	46.62	51.90	10	0.02	10	0.005
9	51.90	57.17	10	0.02	10	0.005
10	57.17	62.44	11	0.02	10	0.152
11	62.44	67.72	12	0.02	10	0.503
12	67.72	72.99	9	0.02	12	0.734
			120			9.429

b. Показниковий розподіл

Заповнюється ще одна таблиця. Перші чотири стовпці ідентичні першій таблиці;

Ймовірність попадання спостережуваної ознаки X в і-й інтервал знаходять за формулою $P_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$;

Теоретичні частоти n' знаходять за формулою: $n'_i = n \cdot P_i$;

і – й доданок критерію знаходять за формулою $\dfrac{(m_i - n'_i)^2}{n'_i}$.

Спостережуване значення критерію Пірсону розраховують за формулою

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{K} \frac{(m_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

№ ін-лу	**Початок** x_i	**Кінець** x_{i+1}	**Частота** m_i	**Ймовірн.** P_i	**Теоретичні частоти** n'	**Спостереж. знач. критерію**
1	$x_{\min}$	x_2	m_1	$e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}$	$n \cdot P_1$	$\dfrac{(m_1 - n'_1)^2}{n'_1}$
2	x_2	x_3	m_2	$e^{-\lambda x_2} - e^{-\lambda x_3}$	$n \cdot P_2$	$\dfrac{(m_2 - n'_2)^2}{n'_2}$
.		.	.			
i	x_i	x_{i+1}	m_i	$e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}$	$n \cdot P_i$	$\dfrac{(m_i - n'_i)^2}{n'_i}$
.		.	.			
K	x_K	x_{max}	m_K	$e^{-\lambda x_K} - e^{-\lambda x_{\max}}$	$n \cdot P_K$	$\dfrac{(m_K - n'_K)^2}{n'_K}$
Перевірка			$\sum m_i = n$			$\chi^2_{ñïîñòåð}$

Наприклад

№ інтерв.	*x(i)*	*x(i+1)*	*m(i)*	*Pi*	*n'*	Кхі-квадр.
1	0.00	0.91	62	0.51	56	0.581
2	0.91	1.81	22	0.25	27	1.066
3	1.81	2.71	11	0.12	13	0.412
4	2.71	3.61	8	0.06	6	0.347
5	3.61	4.51	3	0.03	3	0.009
6	4.51	5.42	3	0.01	2	1.382
7	5.42	6.32	0	0.01	1	0.750
8	6.32	7.22	0	0.00	0	0.365
9	7.22	8.12	0	0.00	0	0.178
10	8.12	9.02	0	0.00	0	0.087
11	9.02	9.93	1	0.00	0	21.745
			110	1.00	110	26.922

c. Нормальний розподіл

Заповнюється ще одна таблиця. Перші чотири стовпці ідентичні першій таблиці;

Ймовірність попадання спостережуваної ознаки X в і-й інтервал знаходять за формулою $P_i = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i)$, де $u_i = \dfrac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в}$, *а* $\Phi(u_i)$ – *функція Лапласа, значення якої можна знайти по таблиці.*

Теоретичні частоти n' знаходять за формулою*:* $n'_i = n \cdot P_i$*;*

і – й доданок критерію знаходять за формулою $\dfrac{(m_i - n'_i)^2}{n'_i}$.

Спостережуване значення критерію Пірсону розраховують за формулою:

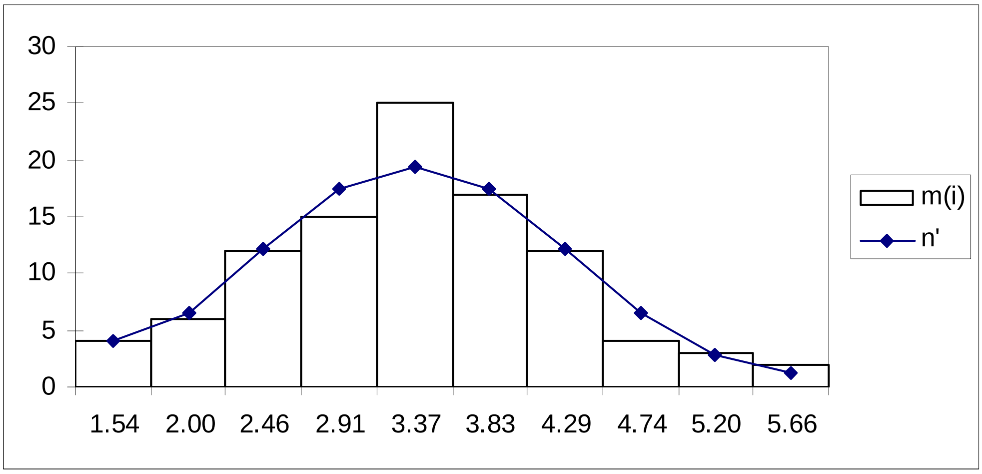
$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{K} \frac{(m_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

№ Інт.	Початок x_i	Кінець x_{i+1}	Частота m_i	u_i	u_{i+1}	$\Phi(u_i)$	$\Phi(u_{i+1})$	P_i	Теор. част. n'	Спост. знач. критерію
1	$x_{\min}$	x_2	m_1	u_1	u_2	$\Phi(u_1)$	$\Phi(u_2)$	P_1	$n \cdot P_1$	$\frac{(m_1 - n'_1)^2}{n'_1}$
2	x_2	x_3	m_2	u_2	u_3	$\Phi(u_2)$	$\Phi(u_3)$	P_2	$n \cdot P_2$	$\frac{(m_2 - n'_2)^2}{n'_2}$
.		.	.							
i	x_i	x_{i+1}	m_i	u_i	u_{i+1}	$\Phi(u_i)$	$\Phi(u_{i+1})$	P_i	$n \cdot P_i$	$\frac{(m_i - n'_i)^2}{n'_i}$
.		.	.							
K	x_K	x_{max}	m_K	u_K	u_{K+1}	$\Phi(u_K)$	$\Phi(u_{K+1})$	P_K	$n \cdot P_K$	$\frac{(m_K - n'_K)^2}{n'_K}$
Перевірка			$\sum m_i = n$							$\chi^2_{набл}$

Наприклад

№ інт.	x_i	x_{i+1}	m_i	u_i	u_{i+1}	$\Phi(u_i)$	$\Phi(u_{i+1})$	P_i	**Теор.част.** n'	**Спостер. знач. критерію**
1	8.95	11.75	7	-00	-1.60	-0.500	-0.445	0.055	5	0.422
2	11.75	14.56	4	-1.60	-1.12	-0.445	-0.367	0.079	8	1.903
3	14.56	17.36	14	-1.12	-0.63	-0.367	-0.232	0.134	13	0.026
4	17.36	20.17	24	-0.63	-0.14	-0.232	-0.052	0.181	18	1.946
5	20.17	22.97	16	-0.14	0.35	-0.052	0.133	0.185	18	0.333
6	22.97	25.78	15	0.35	0.84	0.133	0.297	0.164	16	0.113
7	25.78	28.58	9	0.84	1.32	0.297	0.407	0.110	11	0.360
8	28.58	31.39	9	1.32	1.81	0.407	0.465	0.058	6	1.724
9	31.39	34.19	0	1.81	2.30	0.465	0.489	0.024	2	2.410
10	34.19	37.00	2	2.30	+00	0.489	0.500	0.011	1	0.736
			100					1	100	9.973

Далі знайдені вирівнюючі (теоретичні) частоти треба відобразити на графіку, наприклад, так:



4. Перевірка гіпотези про закон розподілу генеральної сукупності

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез полягає в тому, що якщо спостережуване *значення критерію належить критичної області, то основну гіпотезу відкидають*, якщо ні, то приймають. Критерій Пірсону утворює *правосторонню критичну область*, тому якщо $\chi^2_{набл} \le \chi^2_{кр}$, то гіпотезу H_0 приймають, інакше приймають H_1.

$\chi^2_{кр}(\alpha,k)$ знаходять по таблиці критичних точок розподілу χ^2 по заданому *рівню значущості* α (ймовірність того, що значення критерію попаде в критичну область $P\left(\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}\right) = \alpha$) і кількості мір свободи $k = K - r - 1$, де k – кількість інтервалів, r – кількість параметрів, що оцінюються по вибірці.

Наприклад, для ***рівномірного*** розподілу, розглянутого вище $\chi^2_{набл} = 9{,}429$ (див. стор. 6) k=12, $r = 2$ (a^* і b^*). Тоді $k = 12 - 2 - 1 = 9$. У таблиці вказані наступні значення $\chi^2_{кр}(0.01{,}9) = 21.7$; $\chi^2_{кр}(0.025{,}9) = 19.0$; $\chi^2_{кр}(0.05{,}9) = 16.9$. Отже, з ймовірністю 95% приймається гіпотеза про рівномірний розподіл.

Розглянемо приклад з показовим розподілом. $\chi^2_{набл} = 26{,}922$ (див. стор. 8) k=11, $r = 1$ (λ). Тоді $k = 11 - 1 - 1 = 9$. У таблиці вказані наступні значення $\chi^2_{кр}(0.01{,}9) = 21.7$; $\chi^2_{кр}(0.025{,}9) = 19.0$; $\chi^2_{кр}(0.05{,}9) = 16.9$. Отже, гіпотезу про показовий розподіл генеральної сукупності необхідно відкинути.

У прикладі з ***нормальним*** розподілом $\chi^2_{набл} = 9{,}973$ (див стор. 9) k=10, $r = 2$ (математичне очікування і середнє квадратичне відхилення). Тоді $k = 10 - 2 - 1 = 7$. У таблиці вказані наступні значення $\chi^2_{кр}(0.01{,}7) = 18.5$; $\chi^2_{кр}(0.025{,}7) = 16.0$; $\chi^2_{кр}(0.05{,}7) = 14.1$. Отже, гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності добре узгоджується з експериментальними даними.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
З ДИСЦИПЛІНИ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр у галузі знань 0305 «Економіка та підприємництво» за напрямами підготовки 6.030504 «Економіка підприємства» та 6.030509 «Облік і аудит»)

Укладачі: **БІЛОГУРОВА** Ганна Вікторівна,
ПРОТОПОПОВА Валентина Петрівна,
МАКОГОН Наталя Вікторівна.

Відповідальний за випуск: *О. Б. Костенко*

Редактор: *М. З. Аляб'єв*

Комп'ютерне верстання: *І. В. Волосожарова*

План 2010 , поз. 377М

Підп. до друку 24.06.2010	Формат 60х84/16
Друк на різографі.	Ум. друк. арк. 4,2
Зак. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011 р.